Herbst 08 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a > 0$. Sei $H : [0,a] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Seien $f_1, ..., f_n : [0,a] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} f_i = 0 \text{ in } [0,a] \times \Omega \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass H auf jeder Lösung $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) : [b,c] \to \Omega$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}_k = f_k(t, x_1, ..., x_n),\ 1 \leq k \leq n, \tag{2}$$

konstant ist ($0 \leq b < c \leq a$).

(b) $H, f_1, ..., f_n$ mögen den Differenzierbarkeitsvoraussetzungen unter (a) genügen. Zu jeder Lösung $\mathbf{x} : [b,c] \to \Omega$ ($0 \leq b < c \leq a$) von (2) gebe es eine Konstante $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ mit

$$H(t, \mathbf{x}(t)) = \alpha,\ b \leq t \leq c.$$

Zeigen Sie, dass H die Gleichung (1) erfüllt.

Lösungsvorschlag:

(a) Sei $\mathbf{x}$ eine Lösung, dann ist die Abbildung

$$\gamma : [b,c] \to \mathbb{R},\ \gamma(t) = H(t, \mathbf{x}(t))$$

stetig differenzierbar als Verkettung solcher Funktionen. Wir berechnen mit der Kettenregel

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_j} f_j = 0$$

in $[b,c]$. Damit ist γ konstant, also H konstant auf jeder Lösung, da $\mathbf{x}$ beliebig gewählt war.

(b) Sei $t_0 \in [0,a], x_0 \in \Omega$. Das Gleichungssystem (2) besitzt nach dem Satz von Peano eine Lösung zur Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t_0) = x_0$ auf einem Intervall $[b,c]$ um t_0. Zu dieser Lösung gibt es nun ein α wie vorausgesetzt. Wir betrachten wieder die Abbildung γ aus (a), diese ist konstant und somit stetig differenzierbar mit konstanter Ableitung 0. D. h.

$$0 = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_j} f_j.$$

Damit folgt insbesondere

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_j} \dot{x}_j \right)(t_0, x_0) = 0,$$

und damit die Aussage, da $(t_0, x_0) \in [0,a] \times \Omega$ beliebig gewählt war.

$\mathcal{J.F.B.}$