Herbst 08 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)

Seien $a, b > 0$. Im $\mathbb{R}^2$ sei das System

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) x - \frac{ay}{b}$$
$$\dot{y} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) y + \frac{bx}{a}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) Ist $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Lösung dieses Systems, so erfüllt $r^2(t) := \frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2}$ die Differentialgleichung
$$\frac{d}{dt} r^2 = 2(1 - r^2) r^2.$$

(b) Das System besitzt eine nichtkonstante periodische Lösung $t \mapsto (x_0(t), y_0(t))$.

(c) Die periodische Lösung aus (b) ist stabil in dem Sinn, dass
$$r^2(t) \to r_0^2(t) = \frac{x_0^2(t)}{a^2} + \frac{y_0^2(t)}{b^2}, \text{ wenn } r^2(0) \to r_0^2(0).$$

Lösungsvorschlag:

(a) $\frac{d}{dt} r^2 = \frac{2x(1-r^2)x - \frac{2xay}{b}}{a^2} + \frac{2y(1-r^2)y + \frac{2xby}{a}}{b^2} = 2(1-r^2)(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) - \frac{2xy}{ab} + \frac{2xy}{ab} = 2(1-r^2)r^2$.

(b) Eine Ruhelage der Gleichung aus (a) ist $r^2 = 1$. Wir suchen eine Lösung des Systems mit $r^2 = 1$, und erhalten $\dot{x} = -\frac{a}{b} y, \dot{y} = \frac{b}{a} x$, also ein lineares System. Mit Standardmethoden (oder durch Raten) erhalten wir, dass dessen allgemeine Lösung $(x(t), y(t)) = (\lambda \cos(t) - \mu \frac{a}{b} \sin(t), \lambda \frac{b}{a} \sin(t) + \mu \cos(t))$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist. Aus $r^2 = 1$ erhalten wir $\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} = 1$. Wählen wir geeignete λ, μ beispielsweise $(\lambda, \mu) \in \{(a,0), (0, b), (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})\}$, so erhalten wir nichtkonstante, 2π-periodische Lösungen. (Für die restliche Aufgabe würde es genügen eine spezielle Wahl zu treffen, wir beweisen den Rest aber allgemein.)

(c) Wir zeigen, dass 1 eine asymptotisch stabile Ruhelage von $y' = 2(1-y)y$ ist. Dazu nutzen wir den Linearisierungssatz und berechnen die Ableitung $2 - 4y$ der Strukturfunktion, sowie die Ableitung $2 - 4 = -2 < 0$ an der Stelle 1.
Die Aussage folgt nun aus den vorherigen Aufgaben: Sei $(x(t), y(t))$ eine Lösung des Systems, dann löst $r^2(t)$ nach (a) die Differentialgleichung $y' = 2(1-y)y$. Die periodische Lösung r_0 aus (b) erfüllt $r_0^2 = 1$. Falls nun $r^2(0) \to r_0^2(0) = 1$ konvergiert, so folgt aus der Attraktivität der Ruhelage 1 auch $r^2(t) \to r_0^2(t) = 1$. Dabei ist die Konvergenz punktweise bzw. kompakt (gleichmäßig auf kompakten Teilmengen) zu verstehen

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$