Herbst 08 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Betrachten Sie das Polynom $p(z) := z^4 + 6z + 3 \in \mathbb{C}[z]$. Zeigen Sie:

(a) Alle Nullstellen von $p(z)$ liegen in $B_2(0)$, wobei $B_r(0) := \{z \mid \|z\| < r\}$ die offene Kugel um den Nullpunkt mit Radius $r > 0$ bezeichnet.

(b) Genau eine Nullstelle von $p(z)$ liegt in $B_1(0)$.

(c) Folgern Sie, dass $p(z)$ mindestens zwei reelle Nullstellen besitzt. Wie viele Nullstellen von $p(z)$ sind reell, wie viele liegen in der oberen und wie viele in der unteren Halbebene? Hat $p(z)$ doppelte Nullstellen?

Lösungsvorschlag:

(a) Für $|z| \geq 2$ gilt $|p(z)| \geq ||z^4| - |6z+3|| \geq 8|z| - 6|z| - 3 = 2|z| - 3 \geq 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$ und folglich $p(z) \neq 0$.

(b) Dies folgt aus dem Satz von Rouché, da $6z$ genau eine einfache Nullstelle in $B_1(0)$ hat nämlich 0 und da für $|z| = 1$ die Abschätzung $|6z| = 6 > 4 = 1 + 3 \geq |z|^4 + 3$ gilt.

(c) Ist $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ eine Nullstelle von $p(z)$, so ist $0 = \overline{0} = \overline{p(z)} = (\overline{z})^4 + 6\overline{z} + 3 = p(\overline{z})$, also auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p, die von z verschieden ist. Wegen $|z| = |\overline{z}|$, kann die Nullstelle in $B_1(0)$ nur reell sein, sonst gäbe es eine zweite Nullstelle in $B_1(0)$. Analog muss mindestens eine der drei Nullstellen im Ring $\{z : 1 < \|z\| < 2\}$ reell sein.
Wir betrachten $\mathbb{R} \ni z \mapsto p(z)$ und $p'(z) = 4z^3 + 6$ mit einziger reeller Nullstelle $z_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Gäbe es drei oder mehr reelle Nullstellen, so könnten wir diese der Größe nach anordnen, also $z_1 < z_2 < z_3$ schreiben. Nach dem Satz von Rolle besitzt p' eine Nullstelle auf (z_1, z_2) und eine auf (z_2, z_3). Da diese Intervalle disjunkt sind, hätte p' also mindestens zwei Nullstellen, ein Widerspruch. Damit gibt es höchstens zwei reelle Nullstellen und nach unseren vorherigen Folgerungen genau zwei.
Es muss eine Nullstelle in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ geben. Nach unserer Vorüberlegung ist dann $\overline{z}$ die vierte Nullstelle. Liegt z in der oberen Halbebene, dann liegt $\overline{z}$ in der unteren und umgekehrt. Folglich gibt es genau eine Nullstelle in der oberen und genau eine in der unteren Halbebene.
Es gibt keine doppelte Nullstelle. Das könnte man durch Betrachtung von $p'(z)$ beweisen oder mit unseren bisherigen Überlegungen: Es gibt eine reelle Nullstelle in $(-1{,}1)$, eine zweite reelle Nullstelle in $(-2{,}2)\backslash(-1{,}1)$, eine dritte Nullstelle in $\mathbb{H}_+$ und eine vierte Nullstelle in $\mathbb{H}_-$. Also muss jede einfach sein, weil nach dem Fundamentalsatz der Algebra das Polynom vierten Grades $p(z)$ mit Vielfachheit gezählt genau vier Nullstellen hat und wir haben bereits vier verschiedene Nullstellen gefunden.

J.F.B.