Herbst 08 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Begründen Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale und berechnen Sie ihren Grenzwert:
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^4+1} \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^4-z^2}{z^6+z^4+z^2+1} dz.$$

Lösungsvorschlag:

Beide Integranden sind rationale Funktionen mit einem Nenner der stets größer oder gleich 1 ist, wobei der Grad des Nenners um mindestens 2 größer ist als der des Zählers. Wir werden allgemein zeigen: Sind p, q Polynome $\deg p \leq \deg q - 2$ und $q \geq 1$, dann existiert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(z)}{q(z)} \,\mathrm{d}z$. Die lokale Integrabilität folgt aus der Stetigkeit des Integranden. Wir betrachten $\frac{p(z)z^2}{q(z)}$, was für $z \to \pm\infty$ konvergiert (kürze die höchste im Nenner auftretende Potenz) und daher beschränkt ist (sei l der Grenzwert, dann ist für ein $c > 0$ die Funktion gegen $l + 1$ beschränkt, falls $|z| > c$ ist. Auf dem Kompaktum $[-c, c]$ ist die Funktion stetig und ebenfalls beschränkt. Das Maximum der beiden Schranken gibt eine globale Schranke). Dann gilt für $|z| \geq 1$, dass $|f(z)| \leq \frac{c}{z^2}$ ist. Nach dem Majorantenkriterium existieren dann die Integrale auf $[1, \infty)$ und $(-\infty, -1]$, da $\int_1^{\infty} \frac{c}{z^2} \,\mathrm{d}z = \lim\limits_{n\to\infty} c - \frac{c}{n} = c$ und $\int_{-\infty}^{-1} \frac{c}{z^2} \,\mathrm{d}z = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{-n} + c = c$ ist. Auf $[-1,1]$ existiert das Integral ebenfalls als eigentliches Integral, da das Intervall kompakt und der Integrand stetig ist.
Ein ähnliches Vorgehen zeigt für solche Funktionen, dass $\int_\gamma \frac{p(z)}{q(z)}\mathrm{d}z \to 0$ für $R \to \infty$ ist, wenn $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto Re^{it}$ ist. Wir können die Integrale daher als $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma+\Gamma} \frac{p(z)}{q(z)}\mathrm{d}z$ berechnen, wobei $\Gamma : [-R, R] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t$ ist. Da es sich bei $\gamma+\Gamma$ um geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Wege handelt, die für genügend große R keine Singularität durchlaufen und, da $\frac{p(z)}{q(z)}$ auf dem Komplement der endlichen Nullstellenmenge des Nenners holomorph ist, wobei $\mathbb{C}$ eine offene konvexe Menge ist, können wir die beiden Integrale mit dem Residuensatz ausrechnen. Ihre Werte sind $2\pi i \sum\limits_{s\in S} \mathrm{Res}_s(\frac{p(z)}{q(z)})$, wobei S die Menge der Singularitäten in der oberen Halbebene, also die Nullstellen von q mit positivem Imaginärteil bezeichne.
Für $p(z) = 1, q(z) = z^4 + 1$ ist $S = \{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\}$ und jede der Singularitäten ist ein Pol erster Ordnung. Ist nämlich $z^4 + 1 = 0$, so ist $z \neq 0$ und die Ableitung $q'(z) = 4z^3 \neq 0$, also handelt es sich um einfache Nullstellen des Nenners bei nicht verschwindendem Zähler. Daher betragen die Residuen $\frac{1}{4s^3} = \frac{s}{-4}$ für $s \in S$. Für das erste Integral erhalten wir als Wert also $-\frac{\pi i}{2\sqrt{2}}(-1 + i + 1 + i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
Für $q(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1 = \frac{z^8-1}{z^2-1}$ für $z \neq \pm 1$ sind die Nullstellen mit positivem Imaginärteil also $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, was die Elemente von S wiedergibt. Die Nullstellen des Zählers $p(z) = z^4 - z^2 = z^2(z^2 - 1)$ sind -1,0,1 und für $z \neq \pm 1$ ist $\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^2(z^2-1)^2}{z^8-1}$. Wie zuvor erkennt man, dass alle Singularitäten Pole erster Ordnung sind, da die Nennerableitung $8z^7$ als einzige Nullstelle die 0 besitzt und die Nullstellen des Zählers -1,0,1 sind. Daher erhalten wir aus der Polformel, dass das Residuum

in $s \in S$ durch $\frac{s^6-2s^4+s^2}{8s^7} = \frac{s}{8}(s^6 - 2s^4 + s^2)$ gegeben ist. Für $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ erhalten wir also $\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$, für i erhalten wir $-\frac{i}{2}$ und für $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ erhalten wir $\frac{-1+i}{4\sqrt{2}}$. Die Summe dieser Werte ist $\frac{(1-\sqrt{2})i}{2\sqrt{2}}$ und der Integralwert beträgt daher $\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$