Herbst 08 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei P ein nicht konstantes, komplexes Polynom vom Grad n mit den n nicht notwendig verschiedenen Nullstellen $\zeta_1, ..., \zeta_n$. Zeigen Sie:

(a) Für beliebiges $z \in \mathbb{C}\backslash\{\zeta_1, ..., \zeta_n\}$ gilt

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{z-\zeta_j}}{|z-\zeta_j|^2}.$$

(b) Zu jeder Nullstelle ζ von P' gibt es nicht-negative reelle Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$, so dass

$$\zeta = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \zeta_j \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

(d.h. die Nullstellen von P' liegen in der konvexen Hülle der Nullstellenmenge von P).

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten das komplexe Polynom $q(z) = \prod_{j=1}^{n} (z-\zeta_j)$ und für ein $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{\zeta_1, ..., \zeta_n\}$ setzen wir $a := \frac{p(z_0)}{q(z_0)}$. Es gilt $P(z) = aq(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, da $p - aq$ ein Polynom vom Grad n mit den $n+1$ Nullstellen $z_0, \zeta_1, ..., \zeta_n$ ist, also bereits das Nullpolynom ist.

Weiter zeigen wir induktiv die folgende Produktregel: Sind $f_1, ..., f_n$ ganze Funktionen, so folgt

$$\left(\prod_{j=1}^{n} f_j(z)\right)' = \sum_{j=1}^{n} f_j'(z) \prod_{j\neq k=1}^{n} f_k(z), \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Für $n = 2$ erhalten wir die gewöhnliche Produktregel als Induktionsanfang. Nehmen wir die Gültigkeit der Produktformel für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ an, so erhalten wir den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ aus

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{j=1}^{n+1} f_j(z)\right)' &= \left(\prod_{j=1}^{n} f_j(z) \cdot f_{n+1}(z)\right)' = \left(\prod_{j=1}^{n} f_j(z)\right)' \cdot f_{n+1}(z) + \prod_{j=1}^{n} f_j(z) \cdot f_{n+1}'(z) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} f_j'(z) \prod_{j\neq k=1}^{n} f_k(z)\right) \cdot f_{n+1}(z) + \left(\prod_{j=1}^{n} f_j(z)\right) \cdot f_{n+1}'(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} f_j'(z) \left(\prod_{j\neq k=1}^{n} f_k(z) \cdot f_{n+1}(z)\right) + \left(\prod_{j=1}^{n} f_j(z)\right) \cdot f_{n+1}'(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} f_j'(z) \prod_{j\neq k=1}^{n+1} f_k(z) + \left(\prod_{j=1}^{n} f_j(z)\right) \cdot f_{n+1}'(z) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j'(z) \prod_{j\neq k=1}^{n} f_k(z).
\end{aligned}$$

Damit folgt für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{\zeta_1, ..., \zeta_n\}$ aus $(z - \zeta_j) \neq 0 \neq \overline{z - \zeta_j}$ für alle $j = 1, ..., n$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{aq'(z)}{aq(z)} = \frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{n}(z-\zeta_j)\right)'}{\prod\limits_{j=1}^{n}(z-\zeta_j)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{j\neq k=1}^{n}(z-\zeta_k)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(z-\zeta_j)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-\zeta_j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{z-\zeta_j}}{|z-\zeta_j|^2}$$

aus $|w|^2 = w\overline{w}$ für alle $w \in \mathbb{C}$.

(b) Falls $P(\zeta) = 0$ ist, ist nichts zu zeigen (dann ist $\zeta = \zeta_j$ für ein j und wir wählen $\lambda_j =$ 1 und 0 sonst). Sonst gilt $0 = \frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} = \overline{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\zeta - \zeta_j}{|\zeta-\zeta_j|^2}}$, also $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\zeta_j}{|\zeta-\zeta_j|^2} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\zeta}{|\zeta-\zeta_j|^2}$, wenn wir beide Seiten komplex konjugieren, die $\mathbb{R}$-Linearität der komplexen Konjugation, sowie $\overline{r} = r$ für $r \in \mathbb{R}$ und Teilaufgabe (a) benutzen.

Sei $\Lambda := \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{|\zeta-\zeta_j|^2} > 0$ sowie $\lambda_j := \frac{\frac{1}{|\zeta-\zeta_j|^2}}{\Lambda}$ dann sind alle λ_j nichtnegative reelle Zahlen, die sich zu 1 summieren, da

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = \frac{1}{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|\zeta-\zeta_j|^2} = \frac{1}{\Lambda}\Lambda = 1$$

gilt und sie erfüllen $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\zeta_j = \zeta$, wegen

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\zeta_j = \frac{1}{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{\zeta_j}{|\zeta-\zeta_j|^2} = \frac{1}{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|\zeta-\zeta_j|^2}\zeta = \frac{1}{\Lambda}\Lambda\zeta = \zeta.$$

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$