Herbst 08 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Seien σ, r und b positive Konstanten. Die *Lorenz-Gleichungen* lauten

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y-x), \\ y' &= rx - y - xz, \\ z' &= xy - bz. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Nullpunkt für $r > 1$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist.

(b) Zeigen Sie sowohl durch Linearisierung als auch unter Verwendung der Lyapunov-Funktion $V(x,y,z) := x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$, dass der Nullpunkt für $0 < r < 1$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Da (0,0,0) eine Nullstelle der Strukturfunktion ist, handelt es sich um einen Gleichgewichtspunkt. Die Jacobimatrix derselbigen ist $J(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$ und die Linearisierung am Nullpunkt ist $\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$. Deren Eigenwerte erhalten wir als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$(-\sigma-\lambda)(-1-\lambda)(-b-\lambda) - r\sigma(-b-\lambda) = (-b-\lambda)(\lambda^2 + (1+\sigma)\lambda + (1-r)\sigma).$$

Diese lauten $-b$, was stets negativ ist, $-\frac{1+\sigma+D}{2}$ was ebenfalls stets negativ ist und $\frac{D-1-\sigma}{2}$, wobei $D := \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4(1-r)\sigma}$ ist. Aus $r > 1$ folgt mit der Monotonie der Wurzelfunktion, dass $D = \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4(r-1)\sigma} > \sqrt{(1+\sigma)^2} = 1+\sigma$ ist, womit der dritte Eigenwert positiv ist. Nach dem Linearisierungssatz folgt, dass 0 instabil ist.

(b) Mit den Ergebnissen aus (a) schätzen wir diesmal D für $0 < r < 1$ ab und erhalten $D = \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4(r-1)\sigma} < \sqrt{(1+\sigma)^2} = 1+\sigma$, falls der Radikand nichtnegativ ist. Dann sind alle Eigenwerte negativ und 0 ist ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Falls der Radikand negativ ist, erhalten wir für D einen imaginären Wert. Alle Eigenwerte haben dann negativen Realteil und wieder folgt asymptotische Stabilität.
Wir zeigen, dass V wirklich eine Lyapunovfunktion ist und berechnen das Skalarprodukt aus Strukturfunktion und $\nabla V(x,y,z) = (2x, 2\sigma y, 2\sigma z)$, also

$$\sigma(y-x)\cdot 2x + (rx-y-xz)\cdot 2\sigma y + (xy-bz)\cdot 2\sigma z = 2\sigma(xy(1+r) - x^2 - y^2 - bz^2)$$

$$\leq 2\sigma(2xy - x^2 - y^2 - bz^2) = -2\sigma((x-y)^2 + bz^2) \leq 0.$$

Falls $z \neq 0$ ist, ist $bz^2 > 0$ und die letzte Ungleichung strikt. Falls $x \neq y$ ist, ist $\sigma(x-y)^2 > 0$ und ebenfalls die letzte Ungleichung strikt. Falls $z = 0$ und $x = y \neq 0$ ist, ist die erste Ungleichung strikt. In jedem dieser Fälle erhalten wir also einen strikt negativen Wert. Der einzig verbleibende Fall ist $(x, y, z) = (0,0,0)$, womit V sogar eine strikte Lyapunovfunktion ist. Wegen $V(x, y, z) > 0 = V(0,0,0)$ für $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ ist $(0,0,0)$ ein striktes Minimum einer strikten Lyapunovfunktioan, also asymptotisch stabil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$