Herbst 08 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Bestimmen Sie die Lösung des linearen Anfangswertproblems $y' = Ay,\ y(0) = y_0$ mit
> $$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 8 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen die Eigenwerte von A mit der charakteristischen Gleichung

$$0 = -\lambda(3-\lambda)(-1-\lambda) - 4 - 8\lambda - 4(-1-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda-1)^2$$

und erhalten 0 und 1. Man sieht leicht ein, dass 1 geometrische Vielfachheit 1 hat, weshalb wir für die Jordannormalform eine Jordankette bestimmen müssen.
Wir berechnen

$$\ker(A - \mathbb{1}_3)^2 = \ker \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als einen Vektor der nicht im Eigenraum $E(A,1)$ liegt wählen wir $v := (0,2,1)$ und berechnen $(A - \mathbb{1}_3)v = (1,2,6) := w$. In $\ker(A)$ wählen wir den Vektor $(1,0,4) =: u$. Mit der Jordanbasis (u, w, v) erhalten wir die Transformationsmatrizen

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \\ -4 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet nun

$$y(t) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} y_0 = \begin{pmatrix} 1 & e^t & te^t \\ 0 & 2e^t & (2t+2)e^t \\ 4 & 6e^t & (6t+1)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \\ (2t+2)e^t \\ (6t+1)e^t \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$