Herbst 08 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Zeigen Sie, dass jede auf ihren maximalen Definitionsbereich fortgesetzte Lösung der Differentialgleichung
> $$y' = \exp(y) \cdot \sin(y)$$
> bereits auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Lösungsvorschlag:

Sei y eine um t_0 definierte Lösung. Die Strukturfunktion $f(y) = e^y \sin y$ ist stetig differenzierbar nach y also lokal lipschitzstetig bezüglich y. Die Nullstellen der Funktion f sind die ganzzahligen Vielfachen von π; jede davon korrespondiert mit einer Ruhelage, die trivialerweise auf $\mathbb{R}$ definiert ist und eine Lösung darstellt. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf handelt es sich bei y bereits um eine Ruhelage, falls $y(t_0) \in \pi\mathbb{Z}$ ist, anderenfalls darf keine Ruhelage geschnitten werden. Im ersten Fall kann y konstant auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden, im zweiten Fall finden wir ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $(k-1)\pi < y(t_0) < k\pi$. Nach dem Zwischenwertsatz folgt dann $y(t) \in ((k-1)\pi, k\pi)$ auf dem gesamten Definitionsbereich, da sonst eine Zwischenstelle existiert, an der y eine Ruhelage schneidet. Wir betrachten jetzt die maximale Fortsetzung der Lösung aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Nach der Charakterisierung des Randverhaltens muss y entweder auf $\mathbb{R}$ definiert sein, oder unbeschränkt sein oder sich dem Rand des Definitionsbereichs von f annähern. Der zweite Fall ist wegen $(k-1)\pi < y(t) < k\pi$ unmöglich und der dritte Fall tritt nicht auf, da f auf $\mathbb{R}$ definiert ist und $\partial\mathbb{R} = \emptyset$ ist. Also muss der erste Fall eintreten, was wir zeigen wollten.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$