Herbst 08 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich der Lösung an:

i)
$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}, \; y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

ii)
$$y' - \frac{t}{t^2-1}y = \sqrt{t^2-1}, \; y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

Lösungsvorschlag:

i) Wir betrachten die Differentialgleichung $2tyy' - y^2 + t^2 = 0$ und suchen einen integrierenden Faktor m, der nur von t abhängt. Die Integrabilitätsbedingung liefert dann, dass jede nullstellenfreie Lösung von $m' = -\frac{2}{t}m$ einen integrierenden Faktor darstellt. Die allgemeine Lösung hat die Form $m(t) = ce^{-2\ln t} = \frac{c}{t^2}$ für $t \neq 0$. Wir wählen $c = 1$ und erhalten die exakte Gleichung

$$\frac{2y}{t}y' + 1 - \frac{y^2}{t^2} = 0.$$

Die Funktion $\Phi(y,t) = t + \frac{y^2}{t}$ stellt ein erstes Integral dar und es gilt $\Phi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$. Wir lösen $1 = t + \frac{y^2}{t}$ nach y auf und wählen beim Radizieren ein positives Vorzeichen, weil wir eine positive Anfangsbedingung erfüllen wollen. Wir erhalten $y(t) = \sqrt{t - t^2}$.
Man rechnet jetzt einfach nach, dass $y'(t) = \frac{1-2t}{2\sqrt{t-t^2}} = \frac{t-2t^2}{2t\sqrt{t-t^2}} = \frac{y(t)^2 - t^2}{2ty(t)}$ sowie $y(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ erfüllt sind, solange der Radikand positiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn beide Faktoren in der Faktorisierung $t - t^2 = t(1-t)$ das gleiche Vorzeichen haben. Für $t < 0$ ist der erste Faktor negativ, der zweite positiv; für $t > 1$ ist der erste Faktor positiv und der zweite negative und nur für $0 < t < 1$ sind beide Faktoren positiv, also auch ihr Produkt.
Daher ist $(0,1) \ni t \mapsto \sqrt{t - t^2}$ die eindeutige Maximallösung des Anfangswertproblems. Eine Fortsetzung in 0 oder 1 ist unmöglich, da die Funktion dort nicht differenzierbar sein kann.

ii) Die Gleichung ist linear und die Funktion $\tilde{y}(t) = \exp(\frac{1}{2}\ln(t^2-1)) = \sqrt{t^2-1}$ stellt eine Lösung der homogenen Gleichung dar. Mit dem Ansatz der Variation der Konstanten folgt aus $y(t) = c(t)\tilde{y}(t)$, dass $c'(t) \equiv 1$ und $c(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, also $c(t) = t$ ist.
Wir erhalten die Maximallösung $(1, \infty) \ni t \mapsto t\sqrt{t^2-1}$. Eine Fortsetzung in 1 ist analog zu i) unmöglich.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$