Herbst 08 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $A \subset G$ eine endliche Teilmenge und $f : G\backslash A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Das Residuum von f an allen Stellen $a \in A$ sei ganzzahlig. Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $g : G\backslash A \to \mathbb{C}^*$ mit der Eigenschaft

$$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} \ \forall z \in G\backslash A,$$

existiert.

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten die Funktion $h : G\backslash A \to \mathbb{C},\ h(z) := \sum\limits_{a\in A} \frac{\mathrm{Res}_a(f)}{z-a}$. Wir stellen fest, dass $\mathrm{Res}_a(f) = \mathrm{Res}_a(h)$ für alle $a \in A$ gilt, da

$$\mathrm{Res}_a(h) = \mathrm{Res}_a\left(\sum_{b\in A\backslash\{a\}} \frac{\mathrm{Res}_b(f)}{z-b}\right) + \mathrm{Res}_a(f)\ \mathrm{Res}_a\left(\frac{1}{z-a}\right) = 0 + \mathrm{Res}_a(f)\cdot 1,$$

da das Residuum linear ist und die Summe über $b \in A\backslash\{a\}$ holomorph auf einer Umgebung um a ist. Wir zeigen, dass die Funktion $f-h$ eine Stammfunktion auf $G\backslash A$ besitzt:

Für jedes $a \in A$ ist $\mathrm{Res}_a(f-h) = \mathrm{Res}_a(f) - \mathrm{Res}_a(h) = 0$. Ist γ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve, deren Spur in $G\backslash A$ verläuft, so ist nach dem Residuensatz das Wegintegral $\int_\gamma f-h \,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum\limits_{a\in A} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\ \mathrm{Res}_a(f-h) = 0$. Nach dem Satz von Morera besitzt die stetige Funktion $f-h$ eine Stammfunktion F.

Seien $p, q : D \to C^*$ holomorphe Funktionen auf einer offenen Menge D. Dann gilt

$$\frac{(pq)'}{pq} = \frac{p'q+pq'}{pq} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q}.$$

Mittels vollständiger Induktion folgt sogar:
Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p_1, ..., p_n : D \to \mathbb{C}^*$ holomorphe Funktionen auf einer offenen Menge D. Dann gilt

$$\frac{(p_1\cdot ...\cdot p_n)'}{p_1\cdot ...\cdot p_n} = \frac{p_1'}{p_1} + ... + \frac{p_n'}{p_n}.$$

Im Induktionsschritt verwende den zuvor gezeigten Induktionsanfang für $n=2$ auf $p = p_1\cdot ...\cdot p_{n-1}$ und $q = p_n$.

Die Menge $D = G\backslash A$ ist offen, die Funktion $H : D \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto e^{F(z)}$ ist holomorph und erfüllt

$$\frac{H'}{H} = \frac{e^F\cdot F'}{e^F} = F' = f-h.$$

Da $\mathrm{Res}_a(f) \in \mathbb{Z}$ vorausgesetzt wurde, ist $f_a : D \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto (z-a)^{\,\mathrm{Res}_a(f)}$ holomorph ($a \notin D$) mit

$$\frac{f_a'}{f_a} = \frac{\mathrm{Res}_a(f)\,(z-a)^{\,\mathrm{Res}_a(f)-1}}{(z-a)^{\,\mathrm{Res}_a(f)}} = \frac{\mathrm{Res}_a(f)}{z-a}.$$

Die Funktion

$$g : G\backslash A \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto H \cdot \prod_{a\in A} f_a$$

ist holomorph und erfüllt

$$\frac{g'}{g} = \frac{H'}{H} + \sum_{a\in A} \frac{f_a'}{f_a} = f - h + \sum_{a\in A} \frac{\mathrm{Res}_a(f)}{z-a} = f - h + h = f.$$

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$