Herbst 08 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Seien
$$p(z) = a_m z^m + ... + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$$
und
$$q(z) = b_n z^n + ... + b_1 z + b_0 \in \mathbb{C}[z],\ q \neq 0,$$
Polynome vom Grad m und n (i.e. $a_m \neq 0, b_n \neq 0$). Zeigen Sie:

i) Ist $m \leq n-2$, so gilt
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)} \mathrm{d}z = 0$$
wobei $\partial B_r(0)$ wie üblich den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = re^{it}$ bezeichne.

ii) Ist $m \leq n-2$ und $r > 0$ so groß, dass alle Nullstellen von q in $B_r(0)$ enthalten sind, so gilt
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)} \mathrm{d}z = 0.$$

iii) Ist $r > 0$ so groß, dass alle Nullstellen von q in $B_r(0)$ enthalten sind, so gilt
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{q'(z)}{q(z)} \mathrm{d}z = n.$$

iv) Ist $m = n-1$, und $r > 0$ so groß, dass alle Nullstellen von q in $B_r(0)$ enthalten sind, so gilt
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)} \mathrm{d}z = \frac{a_{n-1}}{b_n}.$$

Lösungsvorschlag:

i) Die Weglänge beträgt für $r > 0$ immer $2r\pi$. Entlang der Spur des Weges gilt
$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq \frac{|a_m|r^m + ... + |a_1|r + |a_0|}{|b_n|r^n - ... - |b_1|r - |b_0|}$$
falls $r > 0$ so groß ist, dass $|b_n|r^n > |b_{n-1}|r^{n-1} + ... + |b_1|r + |b_0|$ ist, wobei dann auch der Nenner nicht verschwindet. Wir folgern aus der Standardabschätzung
$$0 \leq \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)} \mathrm{d}z\right| \leq \frac{|a_m|r^{m+1} + ... + |a_1|r^2 + |a_0|r}{|b_n|r^n - ... - |b_1|r - |b_0|} \to 0$$
für $r \to \infty$, da $m+1 \leq n-1 < n$ ist. Aus dem Schachtelungssatz folgt die Aussage.

ii) Nach dem Residuensatz, den wir auf die offene, konvexe Menge $\mathbb{C}$, die endliche Nullstellenmenge N von q, den glatten, geschlossenen Weg γ (aus i)) und die auf $\mathbb{C}\backslash N$ holomorphe Funktion $\frac{p(z)}{q(z)}$ anwenden, ist das angegebene Integral die Summe der Residuen aller Singularitäten von $\frac{p(z)}{q(z)}$. Dieser Wert ist unabhängig von $r > 0$ und konvergiert für $r \to \infty$ nach i) gegen 0, muss also selbst konstant 0 sein.

iii) Es handelt sich um das Logarithmische Integral von q. Nach einem Satz aus der Funktionentheorie stimmt das Integral mit der Summe der Ordnungen der Nullstellen von q in $B_r(0)$ überein, ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra also n.

iv) Wir definieren $r(z) := p(z) - a_m z^m$, was ein Polynom vom Grad $n-2$ ist. Unter Verwendung von ii) folgt dann, dass das Wegintegral mit dem Wegintegral des Integranden $\frac{a_m z^m}{q(z)}$ übereinstimmt. Aus dem Residuensatz folgt wie in ii), dass der Integralwert unabhängig von r ist und mit dem Limes $\lim\limits_{r\to\infty}$ übereinstimmt. Setzen wir die Definition des Wegintegrals an, so erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{a_m z^m}{q(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a_m r^{m+1} e^{i(m+1)t}}{q(re^{it})}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a_{n-1} r^n e^{int}}{q(re^{it})}\,\mathrm{d}t.$$

Wir zeigen, dass der Integrand auf $[0, 2\pi]$ für $r \to \infty$ gleichmäßig gegen $\frac{a_{n-1}}{b_n}$ konvergiert. Dann dürfen wir Grenzwertbildung und Integration vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)}\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty}\int_{\partial B_r(0)} \frac{a_m z^m}{q(z)}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{r\to\infty} \frac{a_{n-1} r^n e^{int}}{q(re^{it})}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a_{n-1}}{b_n}\,\mathrm{d}t = \frac{a_{n-1}}{b_n}.\end{aligned}$$

Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n-1} r^n e^{int}}{q(re^{it})} - \frac{a_{n-1}}{b_n}\right| &= \frac{|a_{n-1} b_n r^n e^{int} - a_{n-1} q(re^{it})|}{|b_n||q(re^{it})|} \\ &= \frac{|a_{n-1}||b_{n-1} r^{n-1} e^{it(n-1)} + ... + b_1 r e^{it} + b_0|}{|b_n||q(re^{it})|} \\ &\leq \frac{|a_{n-1}|}{|b_n|}\,\frac{|b_{n-1}|r^{n-1} + ...|b_1|r + |b_0|}{|b_n|r^n - ... - |b-1|r - |b_0|}\end{aligned}$$

für $r > 0$ groß genug unabhängig von $t \in [0{,}2\pi]$. Das konvergiert für $r \to \infty$ gegen 0 und zeigt damit gleichmäßige Konvergenz auf dem kompakten Intervall $[0{,}2\pi]$.

Man hätte diese Teilaufgabe, die ohne Nutzung von iii) bewiesen wurde, auch nutzen können um iii) zu zeigen. Mit $p(z) = q'(z)$ wäre $a_{n-1} = nb_n$.

$\mathcal{J.F.B.}$