Herbst 08 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f im Punkt a die Art der Singularität von f in a. Geben Sie bei hebbaren Singularitäten den Grenzwert von f in a, bei Polen den Hauptteil und bei wesentlichen Singularitäten das Residuum in a an.

i)
$$f : \mathbb{C}\backslash\{\pm i\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{z^3 - 5z + 6i}{z^2 + 1}, \; a = i,$$

ii)
$$f : \mathbb{C}\backslash 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{\exp(z) - 1}, \; a = 2\pi i,$$

iii)
$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right), \; a = 0,$$

Lösungsvorschlag:

i) Die Singularität ist hebbar, denn für $z \neq \pm i$ gilt

$$f(z) = \frac{(z-i)(z^2 + iz - 6)}{(z-i)(z+i)} = \frac{z^2 + iz - 6}{z + i} =: g(z),$$

wobei $g : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung mit $g(i) = 4i = \lim\limits_{z\to i} f(z)$ ist.

ii) Hier handelt es sich bei a um einen Pol erster Ordnung, da der Nenner verschwindet, während dessen Ableitung e^z und der Zähler aber keine Nullstelle bei a aufweisen. Zur Bestimmung des Hauptteils (der Laurent-Entwicklung um a) betrachten wir $\lim\limits_{z\to a} \frac{z-a}{e^z-1} = \lim\limits_{z\to a} \frac{1}{e^z} = 1$, nach der Regel von l'Hospital. Der Hauptteil lautet also $\frac{-1}{z-a}$.

iii) Die Singularität 0 ist wesentlich, da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n}$ die Laurent-Entwicklung von f um 0 ist, was nie abbricht. Das Residuum ist der Koeffizient von z^{-1}, also 0.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$