

**Herbst 07 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$(*) \frac{d^3 x}{dt^3} + x = 0.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (*).
- b) Bestimmen Sie alle Startwerte $(x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)) \in \mathbb{R}^3$, so dass für deren eindeutige Lösung $x(t)$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Lösungsvorschlag:

- a) Wir betrachten das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^3 + 1$ mit einfachen Nullstellen $-1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung von der Form

$$x(t) = ae^{-t} + be^{\frac{t}{2}} \cos(\sqrt{3}t) + ce^{\frac{t}{2}} \sin(\sqrt{3}t)$$

mit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ist.

- b) Wir betrachten die allgemeine Lösung aus a) und zeigen, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ genau dann gilt, wenn $b = 0 = c$ ist. Natürlich ist $\lim_{t \rightarrow \infty} ae^{-t} = 0$ unabhängig von $a \in \mathbb{R}$.

Ist dagegen $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, so muss $e^{\frac{t}{2}}(b \cos(\sqrt{3}t) + c \sin(\sqrt{3}t)) \rightarrow 0$ gelten. Betrachten wir $t_n := \frac{2n}{\sqrt{3}}\pi$, so folgt für $n \rightarrow \infty$, dass $t_n \rightarrow \infty$ und somit $be^{\frac{t_n}{2}} \rightarrow 0$ gilt, was wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{t}{2}} = \infty$ bereits $b = 0$ impliziert. Genauso folgt $c = 0$, wenn man $s_n = \frac{\frac{1}{2} + 2n}{\sqrt{3}}\pi$ betrachtet.

Wir erhalten also $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty \iff b = 0 = c \iff x(t) = ae^{-t}$. Damit ist $x(0) = a = x''(0)$ und $x'(0) = -a$. Umgekehrt ist die Lösung durch $x(0) = x''(0) = -x'(0) = a$ bereits eindeutig bestimmt und durch $x(t) = ae^{-t}$ gegeben. Damit sind die gesuchten Startwerte die Tripel $(a, -a, a)$ für $a \in \mathbb{R}$.

J.F.B.