

**Herbst 07 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \cos x \\ \frac{dy}{dt} &= \sin x.\end{aligned}$$

- a) Begründen Sie, warum das obige System für jeden Anfangswert (x_0, y_0) eindeutig lösbar ist und warum die Lösungen für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren.
- b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

Lösungsvorschlag:

- a) Die Strukturfunktion $f(x, y) := (y \cos x, \sin x)$ ist stetig differenzierbar und somit lokal lipschitzstetig. Außerdem gilt $|f(x, y)| \leq |y| \leq |x| + |y| = |(x, y)|$, weshalb das Wachstum linear beschränkt bleibt. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert zu jedem Anfangswert genau eine Lösung und diese ist wegen des linear beschränkten Wachstums global definiert.

- b) Es gilt $f(x, y) = 0 \iff \sin x = 0 = y \cos x \iff x \in \pi\mathbb{Z}, y = 0$, da $\sin x = 0 \implies \cos x \neq 0$.

Die Ruhelagen sind also die Punkte $(k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wir benutzen zunächst den Linearisierungssatz. Es ist $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} -y \sin x & \cos x \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$ und $Jf(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$ mit charakteristischem Polynom $\lambda^2 - (-1)^{2k} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Damit besitzt jede dieser Matrizen einen positiven Eigenwert, nämlich 1, und jede Ruhelage ist instabil (und asymptotisch instabil).

J.F.B.