

**Herbst 07 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Berechnen Sie für $\omega > 0$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + x + 1} dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + x + 1} dx.$$

Hinweis: Betrachten Sie das obige Integral längs eines geeigneten geschlossenen Wegs in der komplexen Ebene und gehen Sie zum „Grenzwert“ über. Führen Sie dabei alle nötigen Abschätzungen explizit aus.

Lösungsvorschlag:

- a) Wir integrieren die holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -\frac{1}{2}\} \setminus \{\frac{\sqrt{3}i-1}{2}\}$, $f(z) := \frac{e^{i\omega z}}{z^2+z+1}$ längs der stückweise stetig differenzierbaren und geschlossenen Wege $\gamma_r := \gamma_r^1 + \gamma_r^2$ mit $\gamma_r^1 : [-r, r] \ni t \mapsto t \in \mathbb{C}$ und $\gamma_r^2 : [0, \pi] \ni t \mapsto re^{it} \in \mathbb{C}$, wobei wir noch $r > 1$ voraussetzen, damit die Wege im Definitionsgebiet von f verlaufen.

Aus der Definition des Wegintegrals folgt sofort $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+x+1} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_r^1} f dz - \int_{\gamma_r^2} f dz \right).$

Da die Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -\frac{1}{2}\}$ offen und konvex ist und f darauf mit Ausnahme einer Singularität holomorph ist, können wir den Residuensatz auf die Kurven γ_r anwenden, die sich alle genau einmal positiv orientiert um die Singularität $z_0 := \frac{\sqrt{3}i-1}{2}$ winden. Da es sich um einen Pol erster Ordnung handelt (der Zähler verschwindet nicht und der Nenner besitzt eine einfache Nullstelle), können wir das Residuum mit der Polformel ausrechnen. Es gilt $\operatorname{Res}_f(w_0) = \frac{e^{i\omega z_0}}{2z_0+1}$ und somit $\int_{\gamma_r} f dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\omega z_0}$.

Die Kurvenlänge von γ_r^2 ist $r\pi$ und längs der Spur liegen nur komplexe Zahlen mit nichtnegativem Imaginärteil und Betrag r . Daher lässt sich der Integrand wie folgt abschätzen: Es gilt $|z^2+z+1| \geq |z|^2-|z|-1 = r^2-r-1$ für hinreichend große r und $|e^{i\omega z}| = e^{-\omega \operatorname{Im} z} \leq 1$, also insgesamt $|f(z)| \leq \frac{1}{r^2-r-1}$. Nach der Standardabschätzung ist $0 \leq \left| \int_{\gamma_r^2} f dz \right| \leq \frac{\pi r}{r^2-r-1} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$.

Insgesamt folgt also $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+x+1} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\omega z_0} = \frac{2\pi e^{-\frac{\omega\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right).$

J.F.B.