

**Herbst 07 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) := z^3 + 2z + ce^{z^2}$ für alle $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < e^{-1}$ genau eine Nullstelle im Einheitskreis $\mathbb{D}$ besitzt.

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten die ganzen Funktionen $h(z) := z^3 + 2z$ und $g(z) := ce^{z^2}$ sowie die glatte Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$. Für alle $z \in \text{Spur}(\gamma)$ gilt

$$|z| = 1 \text{ und } |h(z)| \geq |2|z| - |z^3|| = 1 > |c|e = |c|e^{|z|^2} \geq |c|e^{\text{Re}z^2} = |g(z)|.$$

Insbesondere hat h keine Nullstelle auf der Spur (und natürlich auch keine Polstelle). Nach dem Satz von Rouché stimmt die Anzahl der Nullstellen von f in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Ind}_\gamma(z) = 1\}$ mit der von h überein. Wegen $h(z) = z(z^2 + 2) = z(z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i)$ sind die Nullstellen von h $0, \pm\sqrt{2}i$, von denen nur 0 in $\mathbb{D}$ liegt. Die Mächtigkeit aller Nullstellen ist 1 und somit besitzt auch f genau eine Nullstelle in $\mathbb{D}$. Auf dem Rand kann auch keine Nullstelle liegen, denn gäbe es eine Nullstelle mit $|z_0| = 1$ so wäre $h(z_0) = -g(z_0)$ und $|h(z_0)| = |g(z_0)|$ ein Widerspruch.

J.F.B.