

**Herbst 07 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

(drei Kurzaufgaben zur Funktionentheorie)

- a) Begründen Sie, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 2}$ eine konvergente Potenzreihen-Entwicklung um $z = 0$ besitzt und geben Sie deren Konvergenzradius an.
- b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|}$ für alle $z \neq 0$.
- c) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f \circ f = f$.

Lösungsvorschlag:

- a) Die Funktion f ist als Verknüpfung holomorpher Funktionen selbst holomorph auf der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus \{1+i, 1-i\}$, da $(z-1-i)(z-1+i) = z^2 - 2z + 2 = 0 \iff z \in \{1+i, 1-i\}$. Da holomorphe Funktionen auch analytisch auf ihrer Definitionsmenge sind, folgt die Existenz einer Potenzreihen-Entwicklung um 0.
Der Konvergenzradius ist der Radius der maximalen Kreisscheibe um 0, die vollständig im Holomorphiegebiet enthalten ist. Dies ist hier $\min\{|1+i|, |1-i|\} = \sqrt{2}$.
- b) Aus der Voraussetzung folgt sofort $|f(z)| > 0$ und somit $f(z) \neq 0$ für $z \neq 0$. Die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) := \frac{1}{zf(z)}$ ist somit wohldefiniert und es gilt $|g(z)| \leq 1$ für $z \neq 0$. Nach Riemanns Hebbarkeitssatz ist 0 eine hebbare Singularität und g besitzt eine ganze Fortsetzung, die natürlich immer noch beschränkt ist und nach dem Satz von Liouville somit konstant sein muss. Dann muss auch g als Einschränkung einer konstanten Funktion konstant sein, sei also $g \equiv c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Dann folgt $0 < |c| \leq 1$ und durch Umstellen schließlich $f(z) = \frac{1}{cz}$ für $z \neq 0$. Man beachte, dass g keine Nullstelle hat und somit $c \neq 0$ sein muss.
Umgekehrt erfüllt die holomorphe Funktion $f_c(z) := \frac{1}{cz}$ natürlich $|f_c(z)| \geq \frac{1}{|z|}$ für $z \neq 0$, falls $c \in \mathbb{C}$ mit $0 < |c| \leq 1$ ist. Die gesuchten Funktionen sind also genau die f_c für $c \in \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$.
- c) Zunächst erfüllt jede konstante Funktion die Voraussetzung offensichtlich. Genauso ist $f = id_{\mathbb{C}}$ holomorph und idempotent. Wir zeigen, dass dies die einzigen Funktionen sind.
Wir betrachten die Menge $\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\} \subset \mathbb{C}$. Es ist $\mathcal{F} = g^{-1}(0)$ das Urbild der 0 unter der holomorphen und daher stetigen Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = f(z) - z$. Daher ist $\mathcal{F}$ abgeschlossen.
Sei f wie angegeben, aber nicht konstant, dann ist $f(\mathbb{C})$ nach dem Satz von der Gebietstreue offen. Außerdem ist die Menge nichtleer, da sie $f(0)$ als Element enthält. Es gilt $\mathcal{F} = f(\mathbb{C})$. Für $\subset$ sei $z \in \mathcal{F}$, dann ist $z = f(z) \in f(\mathbb{C})$. Für $\supset$ sei $z \in f(\mathbb{C})$, dann gilt $z = f(w)$ für ein $w \in \mathbb{C}$ und somit $f(z) = (f \circ f)(w) = f(w) = z$, also $z \in \mathcal{F}$.
Damit ist $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere Menge, die zugleich offen und abgeschlossen ist. Da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist, muss also $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ gelten. Das heißt es gilt $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und somit $f = id_{\mathbb{C}}$. Also ist entweder $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$ oder $f = id_{\mathbb{C}}$.

J.F.B.