H07T2A5

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = A(\alpha)x$ auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 \\ -2 & \alpha-1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Bestimme in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem des Systems.

b) Gebe jeweils die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$ an, sodass $(0,0)$ ein stabiler, bzw. ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Systems $\dot{x} = A(\alpha)x$ ist.

zu a):

Bestimme zunächst das charakteristische Polynom von A:

$$\det(A - \mathbb{E}X) = \begin{pmatrix} \alpha+2-X & 1 \\ -2 & \alpha-1-X \end{pmatrix} = (\alpha+2-X)(\alpha-1-X)+2 =$$

$$= X^2 - X - 2\alpha X + \alpha^2 + \alpha$$

$$X_{1,2} = \frac{(1+2\alpha) \pm \sqrt{(-1-2\alpha)^2 - 4\cdot 1\cdot(\alpha^2+\alpha)}}{2} = \frac{1+2\alpha \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte } X_1 = \alpha, \quad X_2 = 1+\alpha$$

Beide Eigenwerte haben algebraische Vielfachheit 1. Bestimme nun die Eigenräume.

$$\mathrm{Eig}(A,\alpha) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(A,1+\alpha) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$$

Damit ist durch $\{\mu_1, \mu_2\}$ mit

$$\mu_1(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \\ -2e^{\alpha t} \end{pmatrix}$$

$$\mu_2(t) = e^{(1+\alpha)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1+\alpha)t} \\ -e^{(1+\alpha)t} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem gegeben. Nachweis:

$$\mu_1'(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{\alpha t} \\ -2\alpha e^{\alpha t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 \\ -2 & \alpha-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\alpha t} \\ -2e^{\alpha t} \end{pmatrix}$$

$$\mu_2'(t) = \begin{pmatrix} (1+\alpha)e^{\alpha t} \\ -(1+\alpha)e^{\alpha t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 \\ -2 & \alpha-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(1+\alpha)t} \\ -e^{(1+\alpha)t} \end{pmatrix}$$

Wronski-Determinante:

$$w(0) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Also sind $\mu_1(t)$ und $\mu_2(t)$ linear unabhängig und bilden damit ein Fundamentalsystem des Systems.

zu b): Damit $(0,0)$ asymptotisch stabil ist, muss der Realteil der Eigenwerte negativ sein. Also $\Re e(\alpha) < 0$ und $\Re e(1+\alpha) < 0$

Hierfür muss $\alpha \in]-\infty, -1[$ gelten.

Damit $(0,0)$ stabil ist, muss der Realteil der Eigenwerte negativ sein und für Eigenwerte $= 0$ muss die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit sein. In der a) wurde bereits gezeigt, dass die Eigenwerte algebraische und geometrische Vielfachheit $= 1$ haben.

Somit gilt nun $\alpha \in]-\infty, -1]$.