

**Herbst 07 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) \geq f(t)$ für alle $t \geq 0$ und sei $f(0) \geq 1$.

- a) Zeigen Sie, dass f auf $[0, \infty)$ streng monoton steigend ist.
- b) Zeigen Sie, dass $f(t) \geq \exp(t)$ für alle $t \geq 0$.

Lösungsvorschlag:

- a) Wir zeigen, dass $f' > 0$ auf $[0, \infty)$ ist. Angenommen f' hätte eine positive Nullstelle t_0 , dann ist $t_- := \inf\{t \in [0, \infty) : f'(t) = 0\} > 0$ wohldefiniert. Auf $[0, t_-)$ ist $f' > 0$, da f' Darboux-stetig ist (d. h. aus $f'(c) < s < f'(d)$ folgt $s = f'(u)$ für ein $u \in (c, d)$). Daher wächst f streng monoton auf $[0, t_-)$ und es gilt $f'(t_-) \geq f(t_-) = \lim_{t \rightarrow t_-} f(t) \geq f(0) \geq 1$. Da f als differenzierbare Funktion auch stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|t - t_-| < \delta \implies |f(t) - f(t_-)| < 1 \implies f(t) > 0$. Damit folgt $f'(t) \geq f(t) > 0$ auf $(t, t + \delta)$ im Widerspruch zu $t_- = \inf\{t \in [0, \infty) : f'(t) = 0\}$. Damit ist die Annahme falsch und f' besitzt keine positive Nullstelle. Da f' Darboux-stetig ist, folgt also $f' > 0$ auf $[0, \infty)$, da $f'(0) \geq f(0) \geq 1 > 0$ ist. Somit ist f streng monoton wachsend.
- b) Wir betrachten für $c \in [0, 1)$ die differenzierbare Funktion $g_c(t) := f(t) - ce^t$, dann ist $g'_c(t) = f'(t) - ce^t \geq f(t) - ce^t = g_c(t)$ und $g_c(0) \geq 1 - c > 0$. Also ist $h_c(t) := \frac{g_c(t)}{g_c(0)}$ differenzierbar mit $h'_c(t) \geq h_c(t)$ und $h_c(0) = 1$. Nach a) ist h_c streng monoton wachsend, also auch $g_c = g_c(0)h_c$, da $g_c(0) > 0$ ist. Damit folgt $g_c(t) > 0$ für $t > 0$ und somit $f(t) > ce^t$ für $t > 0$. Lassen wir jetzt $c \rightarrow 1$ konvergieren, so folgt $f(t) \geq e^t$ für $t > 0$ und für $t = 0$ ist die Aussage klar, da $f(0) \geq 1 = e^0$ vorausgesetzt war.

J.F.B.