

**Herbst 07 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i)^2} dx := \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow +\infty - a}} \int_a^b e^{-(x+i)^2} dx$$

existiert und den Wert $\sqrt{\pi}$ hat.

(*Hinweis:* Integrieren Sie eine geeignete holomorphe Funktion über gewisse Rechtecke. Sie dürfen verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$)

Lösungsvorschlag:

- a) Wir integrieren $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := e^{-z^2}$ entlang des stückweise stetig differenzierbaren und geschlossenen Weges $\gamma = \sum_{n=1}^4 \gamma_n$ mit

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [a, b] &\rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t + i, & \gamma_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto b + (1-t)i \\ \gamma_3 : [-b, -a] &\rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto -t, & \gamma_4 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + it. \end{aligned}$$

Da f holomorph ist, folgt aus Cauchys Integralsatz, dass $\int_{\gamma} f dz = \sum_{n=1}^4 \int_{\gamma_n} f dz = 0$ gilt.

Setzen wir die Definition des Wegintegrals an, so erhalten wir $\int_{\gamma_1} f dz = \int_a^b e^{-(x+i)^2} dx = -\sum_{n=2}^4 \int_{\gamma_n} f dz$ sowie $\int_{\gamma_3} f dz = \int_{-b}^{-a} -e^{-t^2} dt = -\int_a^b e^{-x^2} dx$, wobei die Substitution $x := -t$ benutzt wurde und die Integralgrenzen vertauscht wurden.

Die Wege γ_2 und γ_4 haben beide eine Weglänge von 1 und für $t \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} |f(\gamma_2(t))| &= e^{-\operatorname{Re}(b^2 - (1-t)^2 + 2b(1-t)i)} = e^{(1-t)^2 - b^2} \leq e^{1-b^2} \quad \text{und} \\ |f(\gamma_4(t))| &= e^{-\operatorname{Re}(a^2 - t^2 + 2ait)} = e^{t^2 - a^2} \leq e^{1-a^2}, \end{aligned}$$

weshalb wir aus der Standardabschätzung

$$0 \leq \left| \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\gamma_4} f dz \right| \leq e^{1-b^2} + e^{1-a^2}$$

erhalten, was für $a \rightarrow -\infty$ und $b \rightarrow \infty$ beides gegen 0 konvergiert. Damit gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow +\infty - a}} \int_a^b e^{-(x+i)^2} dx &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b e^{-(x+i)^2} dx \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\int_a^b e^{-x^2} dx - \int_{\gamma_2} f dz - \int_{\gamma_4} f dz \right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

J.F.B.