

**Herbst 07 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- a) Formulieren Sie den Satz von Liouville und beweisen Sie ihn mit Hilfe der Koeffizienten-Abschätzung von Cauchy.
- b) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$.
Zeigen Sie: Ist die Funktion $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so ist f konstant.

Lösungsvorschlag:

- a) Eine ganze Funktion ist genau dann beschränkt, wenn sie konstant ist.
Die Rückrichtung ist klar. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt gegen M , dann ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$ und es gilt für alle $r > 0$, dass $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}$ und daher folgt mit der Standardabschätzung $|a_n| \leq \frac{rM}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n} \rightarrow 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn $r \rightarrow \infty$. Daher ist $f(z) = a_0$, also konstant.
- b) Wir schreiben $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ und betrachten $(a - ib)f = a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f + i(a \operatorname{Im} f - b \operatorname{Re} f)$. Ist $c \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke der Funktion $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$, dann gilt für den Betrag von $g(z) := \exp((a - ib)f)$, die Abschätzung nach oben $|g| \leq \exp(\operatorname{Re} (a - ib)f) \leq e^c$. Demnach ist g beschränkt und ganz, also konstant nach dem Satz von Liouville. Also ist $(a - ib)f'g = g' \equiv 0$ und wegen $\exp \neq 0$ und $(a, b) \neq (0, 0)$ folgt $f' \equiv 0$. Damit ist f lokalkonstant und weil $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, folgt die Konstantheit von f .

J.F.B.