

**Herbst 07 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$t^2 + x^2 + 2tx\dot{x} = 0, \quad x(1) = 1$$

- a) Zeigen Sie, dass es sich um eine exakte Differentialgleichung handelt .
- b) Bestimmen Sie das maximale Intervall, auf das sich diese Lösung fortsetzen lässt.

Lösungsvorschlag:

- a) Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, t) = tx^2 + \frac{1}{3}t^3$ ist stetig differenzierbar mit $\partial_x \Phi(x, t) = 2tx$ und $\partial_t \Phi(x, t) = t^2 + x^2$. Per Definition ist die Differentialgleichung also exakt. (Man könnte auch die Integrabilitätsbedingung nachrechnen, da $\mathbb{R}^2$ konvex ist.)
- b) Wir lösen $\Phi(x, t) = \Phi(1, 1)$ nach x auf, also wir stellen $tx^2 + \frac{1}{3}t^3 = \frac{4}{3}$ zu $x = \sqrt{\frac{4}{3t} - \frac{t^2}{3}}$ um, wobei wir wegen $x(1) > 0$ das positive Vorzeichen wählen. Der Ausdruck ist wohldefiniert, solange $t \neq 0$ und $\frac{4}{3t} \geq \frac{t^2}{3}$ gilt. Da die Lösung für 1 definiert sein soll und $1 > 0$ gilt, erhalten wir $t > 0$ und weiter $4 \geq t^3 \iff t \leq \sqrt[3]{4}$. Damit muss das maximale Intervall in $(0, \sqrt[3]{4}]$ enthalten sein. Da die Funktion in $\sqrt[3]{4}$ nicht linksseitig differenzierbar ist, erhalten wir $(0, \sqrt[3]{4})$ als maximales Intervall.

J.F.B.