

**Herbst 07 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen $x = x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x.$$

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von $\frac{1}{2}A$, wobei A die quadratische Matrix aus der Angabe sei. Es ist

$$\det\left(\frac{1}{2}A - \lambda \mathbb{1}_2\right) = \frac{1}{4} \det(A - 2\lambda \mathbb{1}_2) = \frac{(5 - 2\lambda)(3 - 2\lambda) + 1}{4} = (\lambda - 2)^2$$

mit doppelter Nullstelle 2. Daher ist $B := \frac{1}{2}A - 2\mathbb{1}_2$ nilpotent mit $B^2 = 0$.

Wir berechnen das Matrixexponential und lesen ein Fundamentalsystem aus den Spalten ab: $\exp(\frac{t}{2}A) = \exp(tB) \exp(2t\mathbb{1}_2) = e^{2t}(\mathbb{1}_2 + tB) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + \frac{t}{2} & -\frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 1 - \frac{t}{2} \end{pmatrix},$

also bilden $\begin{pmatrix} e^{2t}(1 + \frac{t}{2}) \\ e^{2t}\frac{t}{2} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -e^{2t}\frac{t}{2} \\ e^{2t}(1 - \frac{t}{2}) \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem.

J.F.B.