

**Herbst 07 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

a) Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der meromorphen Funktion

$$f(z) := \frac{3}{z^2 + z - 2}$$

auf dem unbeschränkten Kreisring $R_{2,\infty} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ um $z = 0$.

b) Besitzt f eine Stammfunktion auf $R_{2,\infty}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungsvorschlag:

a) Die Nullstellen des Nenners sind -2 und 1. Wir formen um und erhalten

$$f(z) = \frac{3}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{1-(-\frac{2}{z})} \right).$$

Für $|z| > 2$ gilt $|\frac{1}{z}| < \frac{1}{2} < 1$ und $|\frac{2}{z}| < \frac{2}{2} = 1$. Mit der geometrischen Reihe erhalten wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-2)^n) z^{-(n+1)}.$$

b) Die Funktion f ist holomorph auf der offenen und konvexen Menge $\mathbb{C}$, wenn man von den beiden Singularitäten -2 und 1 absieht. Beide Singularitäten sind Pole erster Ordnung, deren Residuum beträgt also -1 in -2 und 1 in 1 nach der Polformel. Die Menge $R_{2,\infty}$ ist offen und f ist auf dieser Menge stetig. Sei γ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg, der in $R_{2,\infty}$ verläuft, dann gilt $\text{Ind}_{-2}(\gamma) = \text{Ind}_1(\gamma)$. Nach dem Residuensatz ist $\int_{\gamma} f dz = 2\pi i (\text{Ind}_1(\gamma) - \text{Ind}_{-2}(\gamma)) = 0$. Also besitzt f eine Stammfunktion auf $R_{2,\infty}$.

J.F.B.