

**Herbst 07 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Lösungsvorschlag:

Man könnte dies mit komplexer Integration wie in F11T2A3 zeigen, wir gehen hier aber anders vor.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und fest gewählte $a < b$ sei

$$J_n := \int_a^b \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Da der Integrand stets stetig ist (der Nenner beträgt stets mindestens 1 und ist folglich niemals 0), existiert das eigentliche Riemann-Integral. Für $n = 0$ gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ und daher $J_0 = \arctan(b) - \arctan(a)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} \Big|_a^b + 2(n+1) \int_a^b \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+2}} dx \\ &= \frac{b}{(1+b^2)^{n+1}} - \frac{a}{(1+a^2)^{n+1}} + 2(n+1)(J_n - J_{n+1}). \end{aligned}$$

Dies lässt sich zu $J_{n+1} = \frac{1}{2n+2} \left(\frac{b}{(1+b^2)^{n+1}} - \frac{a}{(1+a^2)^{n+1}} + (2n+1)J_n \right)$ umformen.

Wir bezeichnen nun $I_n := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ und werden induktiv die Existenz des Integrals und die angegebene Formel beweisen.

Für $n = 0$ ist $I_0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} J_0 = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi = \frac{\pi}{2^0} \binom{0}{0}$, was den Induktionsanfang beweist.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiere I_n gegen den angegebenen Wert ist unsere Induktionsannahme.

Für den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ betrachten wir $\lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} J_{n+1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2n+2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{(1+b^2)^{n+1}} - \frac{1}{2n+2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a}{(1+a^2)^{n+1}} + \frac{2n+1}{2n+2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} J_n \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{(2n+1)\pi(2n)!}{(2n+2)2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi(2n+1)!(2n+2)}{2^2(n+1)^2 2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi(2n+2)!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2^{2(n+1)}} \binom{2(n+1)}{n+1}, \end{aligned}$$

und erhalten die behauptete Identität für $n+1$, also nach vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

J.F.B.