

**Herbst 07 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Es sei a eine reelle Zahl mit $a > 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z \cdot e^{a-z} = 1$$

im Einheitskreis $\mathbb{D}$ genau eine Lösung z_0 hat, und dass diese reell ist mit $0 < z_0 < 1$.

Lösungsvorschlag:

Wir wenden den Satz von Rouché auf die glatte und geschlossene Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$ und die ganze Funktion $f(z) = ze^{a-z}$ an. Die einzige Nullstelle von f ist 0, also ist f längs der Spur der Kurve nullstellenfrei und erfüllt

$$|f(z)| = |z| |e^{a-z}| = e^{\operatorname{Re}(a-z)} = e^{a-\operatorname{Re} z} > e^{a-1} > e^0 = 1 = |-1|.$$

Nach dem Satz von Rouché stimmt die Anzahl der Nullstellen von f in $\mathbb{D}$ mit der Anzahl der Nullstellen von $f + (-1)$ überein, wenn man Vielfachheiten berücksichtigt. Erstere beträgt 1, da die Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt, also $f(z) = 0 \iff z = 0$ sowie $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = e^a \neq 0$ gilt. Daher ist 0 die einzige Nullstelle und einfach. Also besitzt auch $f + (-1) = f - 1$ genau eine Nullstelle z_0 . Zuletzt gilt $z \cdot e^{a-z} = 1 \iff f(z) - 1 = 0 \iff z = z_0$.

Die Einschränkung von f auf die reellen Zahlen ist reellwertig und stetig. Es gilt $f(0) = 0 < 1 < e^{a-1} = f(1)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in (0, 1)$ mit $f(\xi) = 1$. Da es genau eine Lösung der Gleichung in $\mathbb{D}$ gibt und $\xi \in (0, 1) \subset \mathbb{D}$ eine Lösung ist, folgt $z_0 = \xi$.

J.F.B.