

**Herbst 06 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\tilde{A} := \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $x(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax + e^{t\alpha}b, \quad x(0) = 0,$$

dann gilt

$$e^{t\tilde{A}} = \begin{bmatrix} e^{tA} & x(t) \\ 0 & e^{t\alpha} \end{bmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie $e^{t\tilde{A}}$ mittels Teilaufgabe (a) für $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösungsvorschlag:

(a) Man könnte dies über die Definition nachrechnen, eleganter ist aber die Verwendung des Satzes von Picard-Lindelöf:

Wir betrachten das Anfangswertproblem $u' = f(u)$, $u(0) = \mathbb{1}_{n+1}$ mit der linearen, also lipschitzstetigen Funktion $f : \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $f(u) = \tilde{A}u$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es genau eine Lösung dieses Problems, nämlich $e^{t\tilde{A}}$. Für den Term auf der rechten Seite gilt nun

$$\begin{bmatrix} e^{tA} & x(t) \\ 0 & e^{t\alpha} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} Ae^{tA} & Ax + e^{t\alpha}b \\ 0 & \alpha e^{t\alpha} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} e^{tA} & x(t) \\ 0 & e^{t\alpha} \end{bmatrix}$$

sowie $\begin{bmatrix} e^{0_{n \times n}} & x(0) \\ 0 & e^0 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_{(n+1) \times (n+1)}.$

(b) Wir benutzen (a) mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha = 1$ und berechnen e^{tA} . Das charakteristische Polynom von A lautet $(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$ und besitzt die Lösungen $1 \pm i$. Der Lösungsraum von $x' = Ax$ wird von $(e^t \cos t, -e^t \sin t)$ und $(e^t \sin t, e^t \cos t)$ aufgespannt. Schreiben wir dies als Spalten in eine Matrix, sodass wir für t_0 die Matrix $\mathbb{1}_2$ erhalten, erhalten wir (wieder nach Picard-Lindelöf analog zu (a)) $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix}$.

Mit Variation der Konstanten finden wir nun eine partikuläre Lösung von $x' = Ax + e^t b$, $x(0) = 0$ durch $x(t) = \begin{bmatrix} e^t(2 - 2 \cos t + \sin t) \\ e^t(-1 + \cos t + 2 \sin t) \end{bmatrix}$.

Aus (a) folgt also $e^{t\tilde{A}} = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t & e^t(2 - 2 \cos t + \sin t) \\ -e^t \sin t & e^t \cos t & e^t(-1 + 2 \sin t + \cos t) \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

J.F.B.