

**Herbst 06 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei das parameterabhängige, 2-dimensionale Differentialgleichungssystem

$$(\Sigma_\alpha) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = f_\alpha(x, y) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - (1 - x^2 - y^2) \begin{bmatrix} \alpha x \\ y^3 \end{bmatrix}$$

mit $\alpha \in (-1, 1)$.

- (a) Zeigen Sie, dass der Ursprung $(0,0)$ die einzige Ruhelage von (Σ_α) in $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ist und untersuchen Sie diese für $\alpha \neq 0$ auf Stabilität.
- (b) Zeigen Sie für $\alpha = 0$ mit Hilfe der Funktion $H(x, y) := x^2 + y^2$ die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$.

Lösungsvorschlag:

- (a) Natürlich ist $(0,0)$ eine Ruhelage in K , da die rechte Seite verschwindet. Sei weiter $(0,0) \neq (x, y) \in K$ eine Ruhelage von Σ_α und $c := 1 - x^2 - y^2 \in]0, 1[$. Die erste Gleichung liefert $y = \alpha x$ und die zweite führt auf $x = -cy^3$. Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste führt zu $y = -\alpha c^2 y^3$. Wäre $y = 0$, so auch $x = 0$ nach der zweiten Gleichung, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Also können wir durch $y \neq 0$ dividieren und folgern $1 = -c^2 \alpha y^2$. Für $\alpha \geq 0$ ist der rechte Term ≤ 0 und die Gleichung besitzt keine Lösung, also Σ_α auch keine weitere Ruhelage. Sei also $\alpha \in]-1, 0[$, dann ist $-\frac{1}{\alpha} \in]1, \infty[$ und $-\frac{1}{\alpha} = c^2 y^2$. Da $0 < y^2 \leq x^2 + y^2 < 1$ und $0 < c^2 < 1$ ist, folgt auch $0 < c^2 y^2 < 1$, also insbesondere $-\frac{1}{\alpha} > 1 > c^2 y^2$ und wieder besitzt die Gleichung $1 = -\alpha c^2 y^2$ keine Lösung. Somit kann neben $(0,0)$ keine weitere Ruhelage in K existieren.

Wir linearisieren das System und leiten daher die rechte Seite ab. Dann ist $Df_\alpha(x, y) = \begin{bmatrix} 3\alpha x^2 + \alpha y^2 - \alpha & 1 + 2\alpha xy \\ -1 + 2xy^3 & 5y^4 + 3x^2 y^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$ und $Df_\alpha(0,0) = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0$ besitzt die beiden Lösungen $\lambda_\pm = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}i$. Für $\alpha > 0$ sind die Realteile beider Eigenwerte von $Df_\alpha(0,0)$ also negativ und somit $(0,0)$ (asymptotisch) stabil, während für $\alpha < 0$ beide positiven Realteil haben und $(0,0)$ (asymptotisch) instabil ist.

- (b) Natürlich ist H eine stetig differenzierbare Funktion, die in $(0,0)$ ein striktes Minimum besitzt. Damit ist nur noch zu zeigen, dass es sich um eine Lyapunovfunktion des Systems handelt. Tatsächlich ist $\nabla H(x, y) f_0(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -x - (1 - x^2 - y^2)y^3 \end{bmatrix} = -2y^4(1 - x^2 - y^2) \leq 0$ auf K , was eine offene Umgebung von $(0,0)$ ist. Somit folgt die Stabilität aus der Direkten Methode Lyapunovs.

J.F.B.