

**Herbst 06 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei die Funktion $f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

- (a) Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f auf

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-1| < 1\}$$

und auf

$$B := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-2| < 1\}.$$

- (b) Berechnen Sie $\int_{\gamma} f(z) dz$ mit $\gamma(t) = 3e^{2\pi it}$, $t \in [0,1]$.

Lösungsvorschlag:

- (a) Wir schreiben mit der geometrischen Reihe $f(z) = \frac{1}{z-1} \frac{-1}{1-(z-1)} = (z-1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} -(z-1)^n = - \sum_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n$ für $z \in A$ und $f(z) = \frac{1}{z-2} \frac{1}{1-(2-z)} = (z-2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n = \sum_{n=-1}^{\infty} -(-1)^n (z-2)^n$ für $z \in B$.

- (b) Der Weg γ ist geschlossen und stetig differenzierbar. Die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex, die Menge $\{1,2\}$ ist endlich und $f : \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und γ verläuft in $\mathbb{C} \setminus \{1,2\}$.

Damit ist der Residuensatz anwendbar. Die Windungszahlen von 1 und 2 sind jeweils 1 und die Residuen können wir aus den Laurententwicklungen ablesen, es handelt sich nämlich um die Koeffizienten von $(z - z_0)^{-1}$. Also ist $\text{Res}_f(1) = -1$ und $\text{Res}_f(2) = 1$ und $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

J.F.B.