

**Herbst 06 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Zeigen Sie unter Verwendung des Identitätssatzes, dass U genau dann zusammenhängend ist, wenn für je zwei holomorphe Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ die Implikation gilt:

$$f \cdot g \equiv 0 \implies f \equiv 0 \text{ oder } g \equiv 0.$$

Lösungsvorschlag:

Sei zunächst U nicht zusammenhängend, dann gibt es offene und disjunkte Mengen O_1, O_2 mit $U \subset (O_1 \cup O_2)$ und $U \cap O_1 \neq \emptyset \neq U \cap O_2$.

Die Funktionen $f(z) := j - 1$ und $g(z) := j - 2$ für $z \in O_j$ mit $j \in \{1, 2\}$ sind lokalkonstant, also holomorph, nicht konstant, also nicht identisch 0 und erfüllen $fg \equiv 0$. Ist also U nicht zusammenhängend, so gilt die Implikation nicht.

Sei jetzt U zusammenhängend und $fg \equiv 0$. Falls $g \equiv 0$ ist, ist nichts zu zeigen. Sonst ist $g \not\equiv 0$ und es gibt ein $z \in U$ sowie ein $\delta > 0$ mit $g(w) \neq 0$ für $|z - w| < \delta$ (wähle ein z mit $g(z) \neq 0$ und dank der Stetigkeit ein δ mit $|g(w) - g(z)| < \varepsilon := |g(z)|$ für $|z - w| < \delta$). Auf dieser Menge muss dann $f(z) = 0$ gelten, weil für $|w - z| < \delta$ gilt, dass $0 = 0 \cdot g(w)^{-1} = (fg)(w)g(w)^{-1} = f(w)$ ist. Damit häuft sich die Menge $\{w \in \mathbb{C} : f(w) = 0\}$ in $z \in U$ und nach dem Identitätssatz ist $f \equiv 0$.

J.F.B.