

**Herbst 06 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Konstruktion eines Arkustangens-Zweiges.

Beweisen Sie, dass es ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (1) $\tan f(z) = z$ für alle $z \in G$,
- (2) G ist maximal.

Mit *maximal* ist hier gemeint: Wenn $G_1 \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G \subset G_1$ und $f_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = f_1(z)$ für alle $z \in G$ ist, dann folgt bereits $G = G_1$.

Lösungsvorschlag:

Wir führen einen abstrakten Beweis mit Hilfe des Lemmas von Zorn. Konkret könnte man auch versuchen G zu bestimmen und $f(w) := \int_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$ für $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto tw$ betrachten.

Es ist $\tan'(z) = 1 + \tan(z)^2$ und somit $\tan'(0) = 1 \neq 0$. Nach dem Umkehrsatz existiert ein $\delta > 0$, sodass $\tan : B_{\delta}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv mit offenem Bild V ist und, sodass die Umkehrfunktion $f : V \rightarrow B_{\delta}(0)$ existiert und holomorph ist.

Für Gebiete $\{0\} \subset G \subset \mathbb{C}$ und darauf definierte holomorphe Funktionen $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tan g(z) = z$ für alle $z \in G$ betrachten wir die Halbordnung $(G, g) \leq (G', g') := (G \subset G')$ und $(g'|_G = g)$.

Sei K eine Kette, also eine Menge $\{(G_j, g_j) : j \in J\}$ mit $J \neq \emptyset$ von Gebieten $\{0\} \subset G_j \subset \mathbb{C}$ und holomorphen Funktionen $g_j : G_j \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tan g_j(z) = z$ für alle $z \in G_j$, sodass $(G_{j_1}, g_{j_1}) \leq (G_{j_2}, g_{j_2})$ oder $(G_{j_2}, g_{j_2}) \leq (G_{j_1}, g_{j_1})$ für alle $j_1, j_2 \in J$ gilt.

Die Menge $G := \bigcup_{j \in J} G_j$ ist offen als Vereinigung offener Mengen und zusammenhängend,

da alle G_j zusammenhängend sind und sich in 0 schneiden. Also handelt es sich um ein Gebiet G mit $\{0\} \subset G \subset \mathbb{C}$.

Weiter betrachten wir die Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) := g_j(z)$ für alle $z \in G_j$ und zeigen zunächst ihre Wohldefiniertheit. Seien $j_1, j_2 \in J$ mit $z \in G_{j_1}$ und $z \in G_{j_2}$. Dann gilt nach der Definition einer Kette ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(G_{j_1}, g_{j_1}) \leq (G_{j_2}, g_{j_2})$, also $g_{j_1}(z) = g_{j_2}|_{G_{j_1}}(z) = g_{j_2}(z)$, da $z \in G_{j_1} \subset G_{j_2}$ ist. Also ist g als Funktion wohldefiniert.

Wir zeigen die Holomorphie von g : Sei $w \in G$, dann gibt es ein $j \in J$ und ein $\delta > 0$ mit $w \in G_j$ und $B_{\delta}(w) \subset G_j$. Also existiert

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{g(z) - g(w)}{z - w} = \lim_{z \rightarrow w} \frac{g_j(z) - g_j(w)}{z - w} = g'_j(w)$$

als komplexe Zahl und g ist komplex differenzierbar in w , also holomorph auf G .

Zuletzt gilt $\tan g(z) = z$ für alle $z \in G$. Sei dazu $z \in G$, dann gibt es ein $j \in J$ mit $z \in G_j$ und $\tan g(z) = \tan g_j(z) = z$. Damit handelt es sich bei G um ein Gebiet mit $\{0\} \subset G \subset \mathbb{C}$ und bei $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ um eine holomorphe Funktion mit $\tan g(z) = z$ für alle $z \in G$. Dieses ist eine obere Schranke von K . Sei nämlich $j \in J$, dann gilt $G_j \subset G$ und $g|_{G_j} = g_j$, also $(G_j, g_j) \leq (G, g)$.

Nach dem Lemma von Zorn existiert nun ein maximales Element (G, f) , das heißt es gibt ein Gebiet G mit $\{0\} \subset G \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tan f(z) = z$ für alle $z \in G$, sodass $G \subset G_1$ und $f_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = f_1(z)$ für alle $z \in G$, also $(G, f) \leq (G_1, f_1)$, impliziert, dass $(G, f) = (G_1, f_1)$, also $G = G_1$ ist. Damit ist G maximal und die Aussage bewiesen.

J.F.B.