

**Herbst 06 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Bestimmen Sie alle auf ganz $\mathbb{C}$ definierten holomorphen Funktionen $f(z)$, welche $|f(z)| \leq |\sin(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllen. Beweisen Sie Ihr Ergebnis!

Lösungsvorschlag:

Natürlich haben die Funktionen $f_c(z) := c \sin(z)$ für $c \in \mathbb{C}$, $|c| \leq 1$ diese Eigenschaft; wir zeigen die Umkehrung.

Wir betrachten die holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) := \frac{f(z)}{\sin(z)}$. Diese ist beschränkt gegen 1.

Nach Riemanns Hebbarkeitssatz sind alle Singularitäten von g hebbar, also existiert eine ganze Fortsetzung h von g . Es gilt $h(z) = \lim_{w \rightarrow z} g(w)$ für $z \in \pi\mathbb{Z}$, was betragsmäßig wieder gegen 1 beschränkt ist. Also ist auch h beschränkt gegen 1 und nach dem Satz von Liouville somit konstant. Damit ist als Einschränkung einer konstanten Funktion auch g konstant einem $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq 1$.

Also folgt $f(z) = c \sin(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Für $z \in \pi\mathbb{Z}$ gilt $0 \leq |f(z)| \leq |\sin(z)| = 0$, also $f(z) = 0 = c \sin(z)$. Damit folgt $f(z) = c \sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

J.F.B.