

**Herbst 06 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Drei Fragen zur Funktionentheorie.

- (a) Hat jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion? Begründung!
- (b) Wo konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$? Begründung!
- (c) Nimmt die komplexe Sinusfunktion jeden Wert an? Begründung!

Lösungsvorschlag:

- (a) Nein, zum Beispiel hat $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion, da das Wegintegral längs $[0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$ nicht 0 ergibt, obwohl die Kurve geschlossen ist.
- (b) Nirgends. Der Nebenteil ist die geometrische Reihe und konvergiert bekanntermaßen genau für $|z| < 1$. Genauso konvergiert der Hauptteil genau für $|\frac{1}{z}| < 1 \iff |z| > 1$. Beides zugleich ist für kein $z \in \mathbb{C}$ erfüllt.
- (c) Ja. Sei $w \in \mathbb{C}$, dann gilt $\sin(z) = w \iff e^{iz} - e^{-iz} = 2w \iff (e^{iz})^2 - 2w(e^{iz}) - 1 = 0$. Das Polynom $z^2 - 2wz + 1$ besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra eine Nullstelle $w_0 \neq 0$, da $0^2 - 2w \cdot 0 - 1 = -1 \neq 0$ ist. Da $\exp(iz)$ jeden Wert außer 0 annimmt (Satz von Piccard) existiert ein Urbild $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $e^{iz_0} = w_0$ und somit $\sin(z_0) = w$.

J.F.B.