

**Herbst 06 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Drei Fragen über Differentialgleichungen.

- (a) Der Satz von Picard-Lindelöf über nichtautonome Differentialgleichungssysteme $\dot{x} = v(t, x)$ erster Ordnung, wobei $v : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung auf offenem $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ bezeichnet, macht noch eine Aussage über v , nämlich die Lipschitzstetigkeit in der Variablen x . Was heißt das?

Vervollständigen Sie dazu folgenden Satz:

Zu jedem $(t, x) \in B$ gibt es eine Umgebung... .

- (b) welche Dimension hat der Lösungsraum des linearen nichtautonomen Systems

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= t\dot{x}_3 \\ \ddot{x}_2 &= x_2 - t^2 x_3 \\ \ddot{x}_3 &= x_1\end{aligned}$$

Geben Sie eine kurze Begründung an!

- (c) Sei A eine reelle 2×2 -Matrix. Die Lösungskurven des Systems $\dot{x} = Ax$ seien im Uhrzeigersinn nach außen drehende Spiralen. Welchen Schluss auf die Eigenwerte von A lässt das zu? Eigenwerte nur angeben!

Lösungsvorschlag:

- (a) ... U von (t, x) , sodass ein $L > 0$ existiert, mit $\|v(t, x) - v(t, y)\| \leq L \|x - y\|$ für alle $(t, x), (t, y) \in U$.
- (b) Wir transformieren in ein äquivalentes System erster Ordnung mittels $x_1 = y_1, x'_1 = y_2, x_2 = y_3, x'_2 = y_4, x_3 = y_5$ und $x'_3 = y_6$ und erhalten $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

was von sechster Dimension ist. Nach der Theorie linearer Systeme erster Ordnung ist der zugehörige Lösungsraum sechsdimensional und somit auch der des gegebenen Systems.

- (c) Die Eigenwerte der Matrix sind komplex konjugiert mit positivem Realteil und von 0 verschiedenen Imaginärteilen.

J.F.B.