

**Herbst 06 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

a) Eine meromorphe Funktion f sei in der Form $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2}$ mit holomorphem $h(z)$ mit $h(z_0) \neq 0$ gegeben. Wie berechnet man das Residuum von f in z_0 ?

b) Geben Sie für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(4+z^2)^2}$$

alle isolierten Singularitäten in $\mathbb{C}$ an samt ihrem Typ und bei Polen auch ihre Ordnung.

c) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Lösungsvorschlag:

(a) Es handelt sich bei z_0 um einen Pol zweiter Ordnung. Nach der Polformel ist $\text{Res}_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z-z_0)^2)' = h'(z_0)$.

(b) Es gilt $f(z) = \frac{1}{(z-2i)^2} = \frac{1}{(z+2i)^2}$. Die Singularitäten von f sind also $\pm 2i$ und beides sind Pole zweiter Ordnung.

(c) Das Integral existiert, da der Nenner von f ein Polynom ist, dessen Grad (4) um mehr als 1 größer ist, als der des Zählers (0) und, da der Nenner keine reelle Nullstelle besitzt.

Demnach lässt sich das Integral als $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^1} f(z) dz$ berechnen, wobei $\gamma_R^1 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t$ ist.

Verlängern wir diese Wege mittels Aneinanderhängen von $\gamma_R^2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$, so erhalten wir für $R > 1$ geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Wege, die keine Singularität von f durchlaufen, sich einmal positiv um $2i$ und gar nicht um $-2i$ winden. Da $\mathbb{C}$ offen und konvex ist und f auf dieser Menge nur zwei, also endlich viele Singularitäten besitzt, ist der Residuensatz anwendbar und liefert als Integralwert für den verknüpften Weg den Wert $2\pi i \text{Res}_f(2i) = 2\pi i \left(\frac{1}{(z+2i)^2}\right)'(2i) = \frac{-4\pi i}{(4i)^3} = \frac{\pi}{16}$ unabhängig von $R > 1$.

Wir schätzen mit der Standardungleichung ab: $0 \leq \left| \int_{\gamma_R^2} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-4)^2} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$.

Also gilt $\frac{\pi}{16} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^1 + \gamma_R^2} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^1} f(z) dz + \int_{\gamma_R^2} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

J.F.B.