

**Herbst 06 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Zeigen Sie:

- a) Ist $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|h(z)|}{|z|^{n+1}} = 0,$$

so ist h eine komplexe Polynomfunktion vom Grad $\leq n$.

- b) Ist $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\operatorname{Re}(h)$ beschränkt, so ist h konstant.

Lösungsvorschlag:

- a) Wir entwickeln $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, dann gilt nach Cauchys Integralformel für $k \in \mathbb{N}$, dass $h^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{h(z)}{z^{k+1}} dz$. Mit der Standardabschätzung und der Kurvenlänge $2\pi r$ folgt $0 \leq |a_k| \leq \frac{\max_{|z|=r} |h(z)|}{r^k}$ für alle $r > 0$ und im Grenzwert $r \rightarrow \infty$ folgt $|a_k| = 0$ für alle $k \geq n+1$ $\left(\text{schreibe } \frac{\max_{|z|=r} |h(z)|}{r^k} = \frac{1}{r^{k-n-1}} \frac{\max_{|z|=r} |h(z)|}{r^{n+1}} \right)$. Aus der Potenzreihenentwicklung folgt $h(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, was eine komplexe Polynomfunktion des Grades $\leq n$ ist.
- b) Die Funktion $g(z) := e^{h(z)}$ ist ganz und wegen $|g(z)| = e^{\operatorname{Re}(h(z))}$ ist g beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant. Also ist $0 \equiv g' = h'g$ und weil g keine Nullstellen hat, folgt $h' \equiv 0$. Somit ist h lokalkonstant und somit konstant, da $\mathbb{C}$ ein Gebiet, also zusammenhängend ist.

J.F.B.