

**Herbst 06 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei ein lineares System erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$u' = Au$$

mit einer (2×2) -Matrix A mit komplexen Koeffizienten.

- a) Welche Bedingung an die Eigenwerte und Eigenräume von A sind äquivalent damit, dass die triviale Lösung $u_0 \equiv 0$ stabil bei $t \rightarrow \infty$ ist, d.h. dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle Lösungen u mit $|u(0)| < \delta$ gilt: $|u(t)| < \varepsilon$ für alle $t > 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Welche Bedingung an die Eigenwerte von A sind äquivalent damit, dass die triviale Lösung sogar asymptotisch stabil ist, d.h. dass sie einerseits stabil ist und zusätzlich $|u(t)| \rightarrow 0$ bei $t \rightarrow \infty$ gilt für alle Lösungen mit $|u(0)| < \delta$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungsvorschlag:

- a) Äquivalent ist, dass jeder Eigenwert nichtnegativen Realteil hat und, dass die Eigenräume der imaginären Eigenwerte bereits den Hauptraum darstellen. Die Begründung ist Standard jeder Theorievorlesung und jedes Theorielehrbuchs und kann dort nachgelesen werden.
- b) Äquivalent ist, dass alle Eigenwerte negativen Realteil haben. Auch hier verzichten wir auf eine Begründung und verweisen auf einschlägige Literatur.

J.F.B.