

**Herbst 06 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$x'' = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y'' = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

für $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Zeigen Sie, dass für Lösungen des Differentialgleichungssystems die beiden Größen

$$E = \frac{1}{2}((x')^2 + (y')^2) - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad M = xy' - x'y$$

unabhängig von t sind.

Anmerkung: Das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreibt die Bewegung eines leichten Planeten im Gravitationsfeld eines (unendlich) schweren Sterns. E wird Energie genannt, M Moment. Dass E und M zeitunabhängig sind, bedeutet, dass sie Erhaltungsgrößen des Systems sind.

b) Welche Beziehung muss zwischen E und M erfüllt sein, damit $(x(t), y(t))$ eine Kreisbahn vom Radius $R > 0$ beschreibt?

Hinweis: Benutzen Sie Polarkoordinaten in der (x, y) -Ebene und drücken Sie E und M in diesen Koordinaten aus.

Lösungsvorschlag:

- (a) $E'(t) = x'(t)x''(t) + y'y''(t) + \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 = x'y' + xy'' - x'y' - x''y = M'(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ zeigt Unabhängigkeit der differenzierbaren Funktionen $t \mapsto E(t), M(t)$ von t .
- (b) Wir gehen hier nur von Kreisbahnen aus, die um den Ursprung zentriert sind. In diesem Fall muss eine Lösung von der Form $(x(t), y(t)) = (R \cos(\phi(t)), R \sin(\phi(t)))$ mit einer geeigneten Funktion ϕ sein. Dann ist $x'(t) = -R \sin(\phi(t))\phi'(t)$ und $y'(t) = R \cos(\phi(t))\phi'(t)$. Es folgt $E = \frac{(R\phi'(t))^2}{2} - \frac{1}{R}$ und $M = R^2\phi'(t)$. Also ist $E = \frac{M^2}{2R^2} - \frac{1}{R}$. Da das Ergebnis unabhängig von t sein muss, kann man sogar $\phi' \equiv c$ und $\phi(t) = ct$ für ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgern.

J.F.B.