

**Herbst 06 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 2e^t \end{pmatrix}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen die Lösung mittels Variation der Konstanten. Das Matrixexponential von der Strukturmatrix ist durch $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ gegeben, wovon man sich leicht überzeugt (durch Definition über die Reihe oder durch Verifikation, dass die Spalten Lösungen des homogenen Problems sind und sich für $t = 0$ die Einheitsmatrix ergibt).

Das Inverse erhalten wir, indem wir t durch $-t$ ersetzen. Unter Verwendung der Symmetrie trigonometrischer Funktionen ergibt sich $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Wir berechnen nun $\int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2e^s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sin t + e^t(\sin t - \cos t) \\ \cos t + e^t(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$ und Multiplizieren diesen Vektor von rechts an das Matrixexponential. Das ergibt die Lösung $x(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ 1 + e^t \end{pmatrix}$, die man leicht nachrechnet.

J.F.B.