H04T1A2

Seien p und q stetige reelle Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$

a) Zeige, dass durch eine geeignete Transformation jeder positiven Lösung y der nichtlinearen Gleichung

$$y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$$

eindeutig eine positive Lösung z der linearen Gleichung

$$z' + (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x) = 0$$

zugeordnet werden kann.

b) Berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + y - x\sqrt{y} = 0, \qquad y(0) = 0$$

Ist die gefundene Lösung eindeutig?

Zu a):

Bei dieser Differentialgleichung handelt es sich um eine Bernoulli Differentialgleichung. Nutze daher die Transformation:

$$z(x) := y(x)^{1-\alpha}$$
$$z'(x) = (1-\alpha)y(x)^{-\alpha}y'(x) = (1-\alpha)y(x)^{-\alpha}(-p(x)y(x) - q(x)(y(x))^\alpha) =$$
$$-(1-\alpha)p(x)y(x)^{1-\alpha} - (1-\alpha)q(x) = (1-\alpha)p(x)z(x) - (1-\alpha)q(x)$$

Zu b):

$$z(x) := y(x)^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y(x)}$$

Transformation wie in Teil a):

$$z'(x) = \frac{1}{2}z - \frac{x}{2} = 0, \qquad z(0) = 0$$

hat laut Lösungsformel für lineare skalare Differentialgleichungen die Lösung

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^x e^{\frac{s}{2}} \frac{s}{2} ds = ... = x - 2 + 2e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\xrightarrow[\text{Rücktransformation}]{} \lambda(x) = (x - 2 + 2e^{-\frac{x}{2}})^2, \quad \lambda(0) = 0$$
$$\lambda'(x) = 2(x - 2 + 2e^{-\frac{x}{2}})(1 - e^{-\frac{x}{2}})$$
$$\lambda'(x) + \lambda(x) - x\sqrt{\lambda(x)} = ... = 0 \Leftrightarrow \mu(x) \geq 0$$
$$\Rightarrow \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x - 2 + 2e^{-\frac{x}{2}})^2 \text{ löst } y' + y - x\sqrt{y} = 0,\ y(0) = 0$$
$$\text{ebenso wie } \nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ 0 \mapsto 0$$