H03T3A1

Bestimme diejenige holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die die harmonische Funktion $u(x,y) = x^3y - xy^3$ als Realteil hat und die Bedingung $f(0) = 3i$ erfüllt. Drücke f als Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ aus.

Lösung:

Da die Funktion f holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
Sei $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$, wobei u, v reellwertig sind, so gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = & 3x^2y - y^3 & \Rightarrow & v(x,y) = & -\frac{y^4}{4} + 3x^2\frac{y^2}{2} + w(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = & x^3 - 3xy^2 & \Rightarrow & v(x,y) = & -\frac{x^4}{4} + 3y^2\frac{x^2}{2} + \tilde{w}(y) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad v(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4} \underbrace{+3}_{\substack{\text{damit} \\ v(0+i0)=3}}$$

Damit erfüllen u, v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

$$\Rightarrow \; f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; x+iy \mapsto x^3y - xy^3 + i\left(\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4} + 3\right) \text{ ist holomorph.}$$

Betrachte nun $f|_{\mathbb{R}}(x+i0) = i\left(3 - \frac{x^4}{4}\right)$ (f eingeschränkt auf der reellen Achse)
$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto i\left(3 - \frac{z^4}{4}\right)$ ist als Polynom holomorph und für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $f(z) = g(z)$.
Da $\mathbb{R} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \; f(z) = g(z)\}$ und $\mathbb{R}$ einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ hat, folgt nach dem Identitätssatz $f = g$.

Damit haben wir $f = i\left(3 - \frac{z^4}{4}\right)$ mit $z = x + iy$ ausgedrückt.