## H02T2A1

Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f$ auf einer offenen Umgebung um die 0 mit der Eigenschaft

$$|f^{(n)}(0)| \geq (n!)^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

b) Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) > 0,\ \Re e(z) > 0\}$$

c) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\Re e(f(z)) = (\Im m(f(z)))^2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

ist konstant.

**zu a):**

Für jedes holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(z-0)^n$$

in einer Kreisscheibe $K(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ mit $r > 0$.

Für $|f^{(n)}(0)| \geq (n!)^2$ ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\right|} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$\Rightarrow$ 0 ist Konvergenzradius von $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(z)^n$ und daher definiert dies keine holomorphe Funktion in der Umgebung $U$ von 0.

**zu b):**

Nach dem kleinen Satz von Picard ist für ein ganzes $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ das Bild

$$g(\mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{oder} \\ \mathbb{C}\setminus\{a\} & (\text{mit } a \in \mathbb{C}) \ \text{ oder} \\ \{b\} & (\text{mit } b \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

also kann $\{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) > 0,\ \Re e(z) > 0\}$ nicht als Bild einer ganzen Funktion vorkommen.

**zu c):**

Damit ist $(\Re e(f))(z) \geq 0$ also $f(\mathbb{C}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : (\Re e(f))(z) \geq 0\}$. Laut dem kleinen Satz von Picard bleibt nur $f(\mathbb{C}) = \{b\}$ mit $b \in \mathbb{C}$.