H00T1A5

Entscheide, ob die nachstehenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind und gebe in jedem der Fälle eine kurze Begründung (Beweis oder Gegenbeispiel) an.

a) Die komplexe Sinusfunktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat die gleichen Nullstellen wie ihre Einschränkung auf die reelle Achse.

b) Für den einmal im positiven Sinne durchlaufenen Einheitskreis $S{+}_1$ gilt:

$$\int\limits_{S+_1} \frac{e^z - 1}{z} dz = 2\pi i$$

c) Genügt eine ganze Funktion f der Beziehung $|f(z)| \leq |e^z|$, so gilt $f(z) = ce^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit einem $c \in \mathbb{C}$.

zu a):

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(eiz - e{-}iz) = \frac{1}{2i}(eixe{-}y - e{-}ixey) =$$

$$= \frac{1}{2i}((\cos(x) + i\sin(x))e{-}y - (\cos(x) - i\sin(x))ry) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sin(x)(e{-}y + ey)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{1}{2i}\cos(x)(e^{-y} - e^{y})}_{\in\mathbb{R}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x)\underbrace{(\underbrace{e^{-y}}_{>0} + \underbrace{e^{y}}_{>0})}_{>0} = 0 \text{ und } \cos(x)(e^{-y} - e^{y}) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 \quad \xRightarrow{(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1} \quad \cos(x) \neq 0$$

$$e^{-y} - e^{y} = (e^{-2y} - 1)\underbrace{e^{y}}_{\neq 0} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-2y} = 1 \underset{y\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} y = 0$$

$\Rightarrow$ WAHR

zu b):

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z - 1$ holomorph, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ als geschlossener Weg nullhomolog in $\mathbb{C}$.

$$\xRightarrow[\text{Formel}]{\text{Cauchy-Integral-}} \underbrace{n(\gamma, 0)}_{=1}\underbrace{f(0)}_{=0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - 0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S+_1} \frac{e^z - 1}{z} dz$$

$\Rightarrow$ FALSCH

zu c):

$e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also ist $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{f(z)}{e^z}$ als Quotient holomorpher Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner wieder holomorph. Laut vorlesung ist

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|e^z|} \leq 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

Nach dem Satz von Liouville ist g konstant, also gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{f(z)}{e^z} = g(z) = c \quad \Rightarrow \quad f(z) = ce^z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ WAHR