

**Frühjahr 26 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Es ist das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -(x_1 + x_2) \ln(x_1^2 + x_2^2) \\ (x_1 - x_2) \ln(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$.
- b) Begründen Sie, dass keine der Ruhelagen asymptotisch stabil ist.
- c) Zeigen Sie: Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erfüllt die maximale Lösung $x : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{mit} \quad x(0) = \xi$$

$$[0, \infty[\subset I_{\max} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 1.$$

Lösungsvorschlag:

- a) Die Ruhelagen sind die Nullstellen von f . Weil 1 die einzige reelle Nullstelle des Logarithmus ist, ist jeder Punkt der Einheitskreislinie eine Ruhelage. Für alle anderen Ruhelagen $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ muss $-(x_1 + x_2) = 0 = x_1 - x_2$ gelten. Addition von $x_2 + x_1$ liefert $2x_1 = 0$ und $x_1 = 0$ woraus aus $x_1 - x_2 = 0$ auch $x_2 = 0$ folgt. Damit erhalten wir $x_1 = 0 = x_2$ was für kein $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erfüllt ist und somit gibt es keine weiteren Ruhelagen neben der Einheitskreislinie.
- b) Für jede Ruhelage x_0 und jedes $\varepsilon > 0$ finde wir eine weitere Ruhelage $x_1 \neq x_0$ mit $|x_0 - x_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Weil die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_1$ die Ruhelage x_1 ist, die für $t \rightarrow \infty$ gegen $x_1 \neq x_0$ konvergiert, kann x_0 nicht attraktiv, also auch nicht asymptotisch stabil sein.
- c) Sei $x = (x_1, x_2) : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Lösung. Wir betrachten $g(t) := |x(t)|^2 = x_1(t)^2 + x_2(t)^2$, dann ist $g > 0$ auf $I_{\max}$ differenzierbar mit

$$g' = 2(x_1'x_1 + x_2'x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2) \ln(x_1^2 + x_2^2) = -2g \ln g.$$

Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{y} = h(y)$ mit $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(y) = -2y \ln y$, dann ist $y = 1$ die einzige Nullstelle und somit einzige Ruhelage von h . Ist $y : I \rightarrow (0, \infty)$ eine Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ mit $y_0 \in (0, 1)$, so folgt $y(t) < 1$ für $t \in I$, weil h stetig differenzierbar, also lokal lipschitzstetig ist und somit die Ruhelage 1 nicht geschnitten werden darf. Daraus folgt $y'(t) > 0$ und striktes monotonen Wachstum, also nähert sich die Lösung nicht dem Rand des Definitionsbereichs und ist beschränkt, also existiert die Lösung zumindest auf $[0, \infty[$ und konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen einen Wert $y_1 \in (0, 1]$. Angenommen y_1 wäre kleiner als 1, dann wäre y' nach unten durch $c := -2y_1 \ln y_1 > 0$ beschränkt und somit

$$y(t) = y_0 + \int_0^t y'(s) \, ds \geq y_0 + tc,$$

was für $t \rightarrow \infty$ gegen ∞ konvergiert und der Beschränktheit gegen 1 widerspricht. Also war die Annahme falsch und y konvergiert gegen 1. Analog erhalten wir für $y_1 > 1$, dass y monoton fällt, mindestens auf $[0, \infty[$ existiert und für $t \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert.

Zurück zur Lösung $x : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ des zweidimensionalen Systems: Für x ist g eine Lösung des gerade untersuchten ein-dimensionalen Systems. Falls $|\xi| = 1$ ist, ist x eine Ruhelage und nichts zu zeigen. Falls $|\xi| < 1$ ist, erhalten wir $1 > |x(t)|^2 \geq |x(0)|^2 = |\xi|^2 > 0$ aus obiger Betrachtung. Ist $|\xi| > 1$, so folgt $1 < |x(t)|^2 \leq |x(0)|^2 = |\xi|^2$, also ist in beiden Fällen x beschränkt und nähert sich nicht dem Rand des Definitionsbereiches, also der 0. Weil f stetig differenzierbar, also lokal lipschitzstetig ist, folgt die gewünschte Aussage nun aus der Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen.

J.F.B.