

**Frühjahr 26 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Für $n \in \mathbb{N}$ und eine n -mal differenzierbare Funktion f bezeichnet $f^{(n)}$ die n -te Ableitung von f . Zeigen Sie:

a) Für jedes $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \mu < 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\mu x} = 0$.

b) Für jede Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y^{(2026)}(x) + y(x) = 0$$

gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x}y(x)) = 0$.

c) Für jede Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y^{(2026)}(x) - y(x) = 0$$

existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x}y(x))$. Ferner gibt es für jedes $L \in \mathbb{R}$ eine Lösung $y_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung, welche $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x}y(x)) = L$ erfüllt.

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt $|e^{\mu x}| = e^{\operatorname{Re}(\mu x)} = e^{\operatorname{Re}(\mu)x} \rightarrow 0$ für $\mathbb{R} \ni x \rightarrow \infty$.

b) Wir betrachten das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^{2026} + 1$ das über $\mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen, einfachen Nullstellen $\lambda_k = \exp(\frac{i(2k+1)\pi}{2026})$, $k = 0, 1, \dots, 2025$ besitzt, die wir für $j = 0, 1, \dots, 1012$ in die komplex konjugierten Zahlenpaare $\lambda_j, \lambda_{2025-j}$ aufteilen. Nach der Lösungstheorie linearer Systeme ist jede Lösung y von der Form

$$y(x) = \sum_{j=0}^{1012} a_j e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)x} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_j)x) + b_j e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)x} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_j)x),$$

wobei $a_0, b_0, \dots, a_{1012}, b_{1012}$ reelle Zahlen sind.

Dementsprechend gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq |e^{-x}y(x)| &\leq \sum_{j=0}^{1012} |a_j| e^{(\operatorname{Re}(\lambda_j)-1)x} |\cos(\operatorname{Im}(\lambda_j)x)| + |b_j| e^{(\operatorname{Re}(\lambda_j)-1)x} |\sin(\operatorname{Im}(\lambda_j)x)| \\ &\leq 2C \sum_{j=0}^{1012} e^{(\operatorname{Re}(\lambda_j)-1)x}, \end{aligned}$$

wobei $C := \max\{|a_j|, |b_j| : j = 0, \dots, 1012\}$, weil Sinus und Kosinus gegen 1 beschränkt sind. Wegen $\operatorname{Re}(\lambda_j) = \cos(\frac{2j+1}{2026}\pi) < 1$ für $j = 0, \dots, 1012$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} 2C \sum_{j=0}^{1012} e^{(\operatorname{Re}(\lambda_j)-1)x} = 0$ und aus dem Schrankensatz folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}y(x) = 0$.

- c) Wie zuvor erhalten wir das charakteristische Polynom mit den Nullstellen $\mu_k = \exp(\frac{ik\pi}{1013})$ für $k = 0, 1, \dots, 2025$, von denen genau $\mu_0 = 1$ und $\mu_{1013} = -1$ reell sind. Die restlichen Nullstellen fassen wir wieder zu komplex konjugierten Paaren μ_j, μ_{2025-j} für $j = 1, \dots, 1012$ zusammen. Nach der Lösungstheorie linearer Systeme ist jede Lösung y von der Form

$$y(x) = ae^x + be^{-x} + \sum_{j=1}^{1012} a_j e^{\operatorname{Re}(\mu_j)x} \cos(\operatorname{Im}(\mu_j)x) + b_j e^{\operatorname{Re}(\mu_j)x} \sin(\operatorname{Im}(\mu_j)x)$$

mit $a, b, a_1, b_1, \dots, a_{1012}, b_{1012} \in \mathbb{R}$. Die Summe können wir wie zuvor behandeln und erhalten $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a + be^{-2x} = a \in \mathbb{R}$ und insbesondere existiert der Limes. Für $L \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $y_L(x) := Le^x$, die offensichtlich eine Lösung darstellt und $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} y_L(x) = 0$ erfüllt.

J.F.B.