

**Frühjahr 26 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Begründen Sie kurz, dass durch

$$f(z) = \frac{1}{(1 - z^6)^3}$$

auf $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ eine holomorphe Funktion definiert ist.

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von f um den Ursprung und geben Sie deren Konvergenzradius an.

Hinweis: Geometrische Reihe und ihre Ableitungen.

Lösungsvorschlag:

Der Nenner der Funktion ist ein Polynom, also holomorph auf $\mathbb{C}$. Aus $(1 - z^6)^3 = 0$ folgt $z^6 = 1$ und $|z|^6 = |z^6| = 1$, also $|z| = 1$. Damit besitzt der Nenner keine Nullstelle auf D und die Funktion ist nach der Quotientenregel holomorph auf D .

Wir betrachten die Funktion $g(z) = \frac{1}{1-z}$ die, analog zu zuvor, holomorph auf D ist und sich dort in die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ entwickeln lässt. Es gilt demnach

$$g''(z) = \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n \text{ für alle } z \in D. \text{ Also folgt } f(z) = \frac{1}{2}g''(z^6) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^{6n} \text{ für alle } z \in D.$$

Weil f holomorph auf D ist, aber nicht holomorph fortsetzbar in 1 ist, handelt es sich bei D um die größte offene Kreisscheibe um 0, auf der f holomorph ist. Demnach ist deren Radius 1 der Konvergenzradius der Potenzreihe.

J.F.B.