

**Frühjahr 26 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei die meromorphe Funktion

$$f(z) = \prod_{n=1}^3 \frac{1}{z - in}.$$

- a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f sowie jeweils deren Typ und jeweils das Residuum von f in diesen Singularitäten.
- b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Lösungsvorschlag:

- a) Offensichtlich sind die isolierten Singularitäten von f die Punkte $i, 2i, 3i$. Weil es sich bei f um eine rationale Funktion handelt und alle Singularitäten einfache Nullstellen des Nenners, aber keine Nullstellen des Zählers sind, handelt es sich um Pole erster Art.

Wir benutzen $\text{Res}_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$ und Stetigkeit um die Residuen zu berechnen und erhalten

$$\text{Res}_f(i) = \frac{1}{-i} \frac{1}{-2i} = -\frac{1}{2}, \quad \text{Res}_f(2i) = \frac{1}{i} \frac{1}{-i} = 1, \quad \text{Res}_f(3i) = \frac{1}{2i} \frac{1}{i} = -\frac{1}{2}.$$

- b) Wegen $|f(z)| = \prod_{n=1}^3 \frac{1}{|z - in|} \leq \frac{1}{|z|^3}$ für $|z| \geq 1$, der Existenz des Integrals $\int_1^\infty x^{-3} dx$, und der Stetigkeit von f auf dem kompakten Intervall $[-1, 1]$, existiert das Integral. Wir können es als $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ berechnen und letzteres als Wegintegral über γ_R mit $\gamma_R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto t$ interpretieren.

Wir nehmen die Wege $\Gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto Re^{-it}$ hinzu und erhalten geschlossene Wege $\gamma_R + \Gamma_R$, die in der offenen konvexen Menge $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 1\}$ verlaufen auf der f holomorph ist. Nach Cauchys Integralsatz verschwinden also die Wegintegrale über $\gamma_R + \Gamma_R$ für alle $R > 0$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im } z \leq 0$ gilt für $n = 1, 2, 3$, dass

$$|z - in| = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z - n)^2} \geq \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2} = |z|,$$

weil $\text{Im } z - n \leq \text{Im } z \leq 0$ ist und $(-\infty, 0] \ni x \mapsto x^2$ monoton fallend ist. Also ist

$$|f(z)| = \prod_{n=1}^3 \frac{1}{|z - in|} \leq \frac{1}{|z|^3}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit nichtnegativem Imaginärteil, insbesondere also längs aller Spuren der Wege $\gamma_R + \Gamma_R$ und insbesondere Γ_R . Daraus ergibt sich mit der Standardabschätzung und $|\Gamma_R(t)| = R$ für alle $R > 0, t \in [0, \pi]$, dass

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq |\Gamma_R| \max_{z \in \text{spur}(\Gamma_R)} |f(z)| \leq \frac{\pi}{R^2},$$

was für $R \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.
Damit ergibt sich

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R + \Gamma_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + 0$$

und das gesuchte Integral verschwindet.

J.F.B.