

**Frühjahr 26 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

a) Es sei $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$f(1) = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 (f(x))^2 \, dx = 1.$$

Beweisen Sie

$$\int_0^1 x f(x) f'(x) \, dx = -\frac{1}{2}.$$

b) Es sei $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_n := n \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} g(t) \, dt.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $g(0)$ konvergiert.

c) Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar. Für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ sei $x \mapsto \partial_y h(x, y_0)$ monoton steigend. Zeigen Sie, dass dann auch $y \mapsto \partial_x h(x_0, y)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ monoton wächst.

Lösungsvorschlag:

a) Wir bemerken, dass $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x))^2$ stetig differenzierbar ist, mit $g'(x) = 2f(x)f'(x)$. Wir integrieren partiell und erhalten

$$1 = \int_0^1 g(x) \, dx = xg(x) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xg'(x) \, dx = g(1) - 2 \int_0^1 x f(x) f'(x) \, dx.$$

Folglich ist

$$\int_0^1 x f(x) f'(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 xg'(x) \, dx = \frac{1}{2}(g(1) - 1) = \frac{1}{2}(f(1)^2 - 1) = -\frac{1}{2}.$$

b) Wir betrachten auf $[0,1]$ die Funktion $G(x) := \int_0^x g(t) \, dt$ und auf $(0,1]$ die Funktion $q(x) := \frac{G(x)}{x}$. Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0+} G(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0+} x$. Außerdem ist G stetig differenzierbar mit $G' = g$ und der Nenner sowie dessen Ableitung die Einsfunktion, besitzen auf $(0,1]$ keine Nullstelle. Wegen der Stetigkeit von g gilt $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{G'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0)$ und nach l-Hospital ist $\lim_{x \rightarrow 0+} q(x) = g(0)$. Betrachten wir die positive Nullfolge $x_n := \frac{1}{n}$, so folgt per definitionem, dass $a_n = q(x_n)$ gegen $g(0)$ konvergiert.

c) Weil h zweimal stetig differenzierbar ist, ist der Satz von Schwartz auf h anwendbar. Wir definieren für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ die Funktionen $h_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_{x_0}(y) := \partial_x h(x_0, y)$ und $h^{y_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h^{y_0}(x) := \partial_y h(x, y_0)$. Aus dem monotonen Wachstum von $x \mapsto h^{y_0}(x)$ für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ folgt $0 \leq (h^{y_0})'(x_0) = \partial_{xy} h(x_0, y_0) = \partial_{yx} h(x_0, y_0) = (h_{x_0})'(y_0)$, also ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Ableitung von h_{x_0} nichtnegativ auf $\mathbb{R}$ und demnach ist h_{x_0} monoton wachsend.

J.F.B.