

**Frühjahr 26 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Null-Lösung eine stabile, stationäre Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ ist.
- b) Bestimmen Sie eine nicht konstante, periodische Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.
- c) Konstruieren Sie eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften: $\dot{x} = Ax$ ist die Linearisierung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ um Null, und die Null-Lösung ist keine stabile Lösung von $\dot{x} = f(x)$.
Hinweis: Es genügt, zur ersten und zur dritten Zeile des linearen Systems geeignete Terme zu addieren.

Lösungsvorschlag:

- a) Das charakteristische Polynom von A lautet $(\lambda^2 + 1)(-1 - \lambda)$ und besitzt die einfachen Nullstellen $-1, -i$ und i . Der Realteil jedes Eigenwertes von A ist also nichtnegativ. Außerdem stimmen bei $\pm i$ die geometrische Vielfachheit und die algebraische Vielfachheit überein, weil beide jeweils 1 betragen. Demnach ist 0 eine stabile, stationäre Lösung.
- b) Wir sehen sofort, dass $x(t) := (\cos(t), \sin(t), \sin(t))$ die geforderten Eigenschaften erfüllt.
- c) Man könnte einfach $f(x) = Ax + (1, 0, 0)$ betrachten, dann wäre die Nullfunktion keine Lösung und auch keine stabile Lösung. Wir bestimmen ein System, sodass die Nullfunktion eine Lösung bleibt.
Wir betrachten $f(x, y, z) := (-z + x^3, x - y + z, x + z^3)$, dann ist f stetig differenzierbar als Polynomfunktion und erfüllt $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ sowie $Jf(0, 0, 0) = A$.
Wir betrachten das Teilsystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z + x^3 \\ x + z^3 \end{pmatrix}$$

zu welchem $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $L(x, z) := -x^2 - z^2$ eine strikte Lyapunovfunktion darstellt, weil $2xz - 2x^4 - 2xz - 2z^4 = -2(x^4 + z^4) < 0$ für $(x, z) \neq (0, 0)$ gilt. Weil $(0, 0)$ kein (striktes, lokales) Minimum von L ist, handelt es sich bei $(0, 0)$ um eine instabile Ruhelage des Teilsystems.

Nach der Definition von Instabilität gibt es nun ein $\varepsilon > 0$, sodass es für alle $\delta > 0$ einen Anfangswert $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $\sqrt{x_0^2 + z_0^2} < \delta$ gibt, sodass die zugehörige Lösung $u = (x(t), z(t))$ des Teilsystems die Bedingung $\|(x(t_0), z(t_0))\|_2 \geq \varepsilon$ für ein $t_0 > 0$ erfüllt.

Wir wählen für das System aus der Aufgabe nun das Gleiche $\varepsilon > 0$ und zu $\delta > 0$

den Anfangswert $(x_0, 0, z_0)$, wobei (x_0, z_0) wie eben konstruiert sei. Dann stimmt die Lösung $v = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ des drei-dimensionalen Systems in der ersten mit $x(t)$ und in der letzten Komponente mit $z(t)$ überein, wobei $u = (x(t), z(t))$ obige Lösung des zwei-dimensionalen Systems sei, d. h. es gilt $v_1 = x, v_3 = z$. Dann erhalten wir aber $\|(x_0, 0, z_0)\|_2 = \|(x_0, z_0)\|_2 < \delta$ und $\|v(t_0)\|_2 = \sqrt{x(t_0)^2 + v_2(t_0)^2 + z(t_0)^2} \geq \sqrt{x(t_0)^2 + z(t_0)^2} \geq \varepsilon$, was der Definition der Instabilität von $(0, 0, 0)$ entspricht.

J.F.B.