

**Frühjahr 26 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen  
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- a) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Sei  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + f(t)x(t) = 0$$

und sei  $H : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion.

Zeigen Sie: Die Funktion  $H \cdot \phi$  ist genau dann eine Lösung der oben stehenden Differentialgleichung, wenn  $H$  die Gleichung

$$\phi(t)H''(t) + 2\phi'(t)H'(t) = 0$$

erfüllt.

- b) Bestimmen Sie *alle* maximalen Lösungen des Anfangswertproblems

$$x''(t) - \frac{2}{t^2}x(t) = 0 \text{ für } t > 0 \text{ mit } x(1) = 3 \text{ und } x'(1) = 0.$$

*Hinweis:*  $\phi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2$  löst offensichtlich die Differentialgleichung des in diesem Aufgabenteil gegebenen Anfangswertproblems.

**Lösungsvorschlag:**

- a) Wir berechnen

$$(H \cdot \phi)''(t) + f(t)(H \cdot \phi)(t) = H''(t)\phi(t) + 2H'(t)\phi'(t) + \underbrace{H(t)\phi''(t) + f(t)H(t)\phi(t)}_{=H(t)(\phi''(t)+f(t)\phi(t))=0}.$$

Nun ist  $H \cdot \phi$  genau dann eine Lösung, wenn die rechte Seite konstant 0 ist, also wenn  $H''\phi(t) + 2H'(t)\phi'(t)$  konstant 0 ist.

- b) Wir benutzen a) mit  $I = ]0, \infty[$  und  $f(t) = -\frac{2}{t^2}$ . Aus dem Satz von Picard-Lindelöf und der Glattheit der Strukturfunktion, folgt die Existenz von genau einer maximalen Lösung. Wir machen den Ansatz  $x(t) = H(t)t^2$  und lösen die Differentialgleichung

$$H''(t)t^2 + 4H'(t)t.$$

Diese ist linear zweiter Ordnung in  $H$  und besitzt die offensichtlichen Lösungen  $H \equiv 1$  und  $H(t) = \frac{1}{t^3}$  (man kann letztere auch durch Lösung der linearen Gleichung erster Ordnung  $y'(t) = -\frac{4}{t}y(t)$  erhalten, indem das Ergebnis integriert wird). Also hat die allgemeine Lösung die Form  $H(t) = a + \frac{b}{t^3}$  mit beliebigen  $a, b \in \mathbb{R}$ . Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen, muss  $H(1) = 3$  und  $H'(1) + 2H(1) = 0$ , also  $H'(1) = -6$  gelten. Das liefert  $a + b = 3$  und  $-3b = -6$ , also  $b = 2$  und  $a = 1$ . Insgesamt erhalten wir als eindeutige Lösung also  $x(t) = t^2(1 + \frac{2}{t^3}) = t^2 + \frac{2}{t}$ .

*J.F.B.*